Sof'ja A. Janovskaja

Über die sogenannten „Definitionen durch Abstraktion" (1936)[1]

Schon vor einiger Zeit genoss unter den Mathematikern, insbesondere unter jenen von ihnen, die dem Marxismus zugeneigt waren, ein geflügeltes Wort Russells große Popularität – „Die Mathematik, das ist eine Wissenschaft, die weder weiß, worüber sie spricht, noch ob es wahr ist, was sie sagt".[2] Aber die Ergebnisse der neuen Forschungen über die Grundlagen der Mathematik haben klar werden lassen, dass die zeitgenössische „gegenstandslose" axiomatische Mathematik,[3] die Russell beabsichtigte, unmöglich ist – nicht nur historisch, sondern auch logisch – ohne die ihr vorangehende „gegenständliche" genetische Mathematik, d. h. ohne eine Mathematik, die *weiß, worüber sie spricht, und auch weiß, ob es wahr ist, was sie sagt*. Es hat sich herausgestellt, dass der zeitgenössischen Mathematik eine Arithmetik der natürlichen Zahlen zugrundeliegen muss, die weiß, was eine *Zahl* ist, was *addieren*, multiplizieren usw. bedeutet. Es hat sich herausgestellt, dass im Grunde genommen „Geometrie [...] nichts anderes [ist], als derjenige Teil des gesamten physikalischen Begriffsfachwerks, der die möglichen Lagenbeziehungen der starren Körper gegeneinander in der Welt der wirklichen Dinge abbildet" (Hilbert).[4]

---

1 S. A. Janovskaja: O tak nazyvaemych „opredelenijach čerez abstraktsiju". In: Pod Znamenem Marksizma 1935, Nr. 4, S. 154–179. Die Übersetzung erfolgte nach dem Wiederabdruck in: Sbornik statej po filosofii matematiki. Red. S. A. Janovskaja, Moskva 1936, S. 108–136.

2 Anm. d. Ü.: Ohne Quellenangabe. "Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true." Recent Work in the Philosophy of Mathematics, The International Monthly, 04. 07. 1901, wiederabgedruckt in: Collected Papers of Bertrand Russell, Vol. III: Toward the "Principles of Mathematics" 1900–1902, hrsg. v. George H. Moore, London 1993, S. 366.

3 Über den wirklichen Gegenstand dieser „gegenstandslosen" Mathematik siehe den Artikel „Idealismus und Mathematik", Front Nauki i Techniki, H. 5–6, 1934, S. 43–51.

4 Anm. d. Ü.: David Hilbert: Naturerkennen und Logik (1930). In: Ders., Gesammelte Abhandlungen, Bd. 3, Berlin 1970, S. 383. Tatsächlich war es auch Hilbert, der die axiomatische der genetischen Methode gegenüberstellte und dieser vorzog. Siehe ders., Über den Zahlbegriff. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 8, 1900, S. 180–184.

Hier darf man unter den Grundbegriffen nicht „alles Mögliche“ verstehen, sondern muss imstande sein, auf die Frage „Was ist dieses?“ zu antworten und darf der Antwort auf diese Frage nicht ausweichen.[5]

Dass die Begriffe der Mathematik einen abstrakten Charakter haben, dass es in der Natur ohne Messung nicht unmittelbar geometrische Punkte, Zahlen als solche etc. gibt – das wissen die Menschen schon seit uralten Zeiten. Und seit eben diesen Zeiten gab es zwei von Grund aus verschiedene Standpunkte bezüglich des Charakters der Abstraktion in der Mathematik: den materialistischen und den idealistischen. Die Frage nach der Eigenart der Abstraktion in der Mathematik, nach der Art und Weise der Begriffsbildung in der Mathematik, verließ seitdem nicht die Arena des philosophischen Streits und des Kampfes der Parteien in der Philosophie. Eine besondere Schärfe gewann sie wieder in der letzten Zeit, als auch für die Mathematiker klar zu werden begann, dass man nicht auf den Standpunkten der „Neutralität“ im Streit zwischen Materialismus und Idealismus verharren darf; dass man insbesondere nicht die Analysis begründen darf, ohne auf die Frage geantwortet zu haben, *was diese* natürliche Zahl denn ist; dass man sich mit anderen Worten auch in der Mathematik nicht allein mit einzelnen Axiomen und Folgerungsprinzipien begnügen darf, sondern, wenigstens für den Beweis der Widerspruchsfreiheit, auch die Frage *nach der Entstehung und Definition* der mathematischen Grundbegriffe stellen muss.

Für den Materialisten sind die wissenschaftlichen Begriffe im Wesen Abbilder, Abdrücke, Aufnahmen der materiellen Wirklichkeit.[6] Die mathematischen Begriffe müssen, insofern sie wirklich wissenschaftlich sind, derselben Forderung genügen, und wir sind deswegen berechtigt zu erwarten, dass sich der Charakter der mathematischen Abstraktion *im Wesentlichen* in Nichts von dem Charakter derjenigen Abstraktion unterscheidet, mit deren Hilfe die Begriffe in den anderen Wissenschaften, in den Naturwissenschaften wie in den Gesellschaftswissenschaften, gebildet werden.

Umgekehrt ist der Idealismus an der Betonung des „besonderen“ Charakters der mathematischen Abstraktion interessiert. Nicht ohne Grund waren sowohl Platon als auch Kant bestrebt, die Mathematik als eine Wissenschaft darzustellen, die über eine *besondere* apriorische, d. h. von der Erfahrung un-

---

5 Siehe den Artikel „Zeitgenössische Strömungen in der bürgerlichen Philosophie der Mathematik“, § 6. In: Front Nauki i Techniki, H. 3, 1935, S. 37–43.

6 Anm. d. Ü.: Diese Formulierung spielt auf Wladimir I. Lenin an: „Die Materie ist eine philosophische Kategorie zur Bezeichnung der objektiven Realität, [...] die von unseren Empfindungen kopiert, fotografiert, abgebildet wird.“ In: Ders., Materialismus und Empiriokritizismus, Werke, Bd. 14, Berlin 1973, S. 124.

abhängige, Quelle der Erkenntnis verfügt; nicht ohne Grund sieht der moderne Idealismus in den Begriffen der Mathematik eine „freie Schöpfung der reinen Vernunft“ oder einen „Einfall des Verstandes“.[7] Das gibt ihm die Möglichkeit, sich die Mathematik im Kampf gegen den Materialismus als „Beweis“ der Überlegenheit des Geistes über die Materie zunutze zu machen – eines Geistes nämlich, der fähig ist, aus seinem Innern Gesetze hervorzubringen, welchen sich die reale Außenwelt, die Natur, fügt.

Man sollte sich jedoch der wirklichen Mathematik (und ihrer Geschichte) zuwenden und den Versuch unternehmen, auf der Grundlage des faktischen Stoffes den Charakter dieses Abstraktionsprozesses aufzuklären, mit dessen Hilfe in ihr die Grundbegriffe gebildet werden, um sich von der Ungereimtheit der idealistischen Fabel von dem „besonderen“ Charakter der mathematischen Erkenntnis zu überzeugen, um bei den mathematischen Begriffen dieselben Abbilder, Abdrücke, Aufnahmen der materiellen Wirklichkeit nachzuweisen, mit welchen wir es in allen anderen Natur- und der Gesellschaftswissenschaften zu tun haben.

Im vorliegenden Artikel machen wir einen solchen Versuch, den Prozess der Begriffsbildung in der Mathematik mit dem Prozess der Begriffsbildung in den anderen Wissenschaften zu vergleichen. Um den im Grunde genommen dialektisch-materialistischen Charakter dieses Prozesses klarer zu erkennen, haben wir Marxens „Kapital“, insbesondere die ersten Kapitel, zum Vorbild genommen, welche die Bildung der Begriffe Wert und Geld enthalten. Der Klärung der Frage nach dessen allgemeinster Organisation schicken wir eine Analyse des Begriffs der ganzen Zahl voraus, eigentlich nicht einmal der Zahl überhaupt, sondern der ersten einfachsten Kardinalzahlen, deren logische (und historische) Entstehung mit der Entstehung des Geldes im „Kapital“ verglichen wird.

§ 1. Die Zahl als Eigenschaft einer Menge von Dingen

1. Die Definition der Gleichzahligkeit

Um zu erklären, was zum Beispiel die Zahl 5 in Wirklichkeit darstellt, lenken wir die Aufmerksamkeit auf diejenigen Verhältnisse und Dinge, für welche die Zahl charakteristisch ist. Wahrscheinlich kommt uns in erster Linie in den Sinn, dass „5“ die Zahl der Finger an der menschlichen Hand oder der Kontinente auf der Erde ist. Aber 5 ist auch die Zahl der Buchstaben im Wort

[7] Anm. d. Ü.: Vgl. Richard Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen? In: Ders., Gesammelte mathematische Werke, Bd. 3, Braunschweig 1932, S. 335: „die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes“.

„cislo“ (Zahl) oder im Wort „bukva“ (Buchstabe); 5 ist die Zahl der verschiedenen regelmäßigen Vielecke, die Zahl der Blütenblätter der Geranien- oder der Ranunkelblüte. Dabei ist die Eigenschaft, fünfzählig zu sein, die zum Beispiel charakteristisch für die Blütenblätter aller Blüten aus der Familie der Bohnen ist, nicht etwas Zufälliges, sondern gerade eine der Besonderheiten, die diese Familie charakterisieren, und die unabhängig davon besteht, ob wir die Blütenblätter zählen oder nicht. So wird schon aus diesen Beispielen ersichtlich, dass die Zahl 5 irgendeine reale Eigenschaft der Dinge der wirklichen, materiellen, *d. h. von unserem Denken unabhängig existierenden Welt* widerspiegelt. Wenn wir jedoch bloß erkannt haben, dass irgendeine Sammlung von Dingen durch die Zahl 5 charakterisiert wird, dann wissen wir noch absolut nichts über die *Natur* der Dinge dieser Sammlung zu sagen, darüber, was dies für Dinge sind. Die Zahl erweist sich so als „reinste quantitative Bestimmung“ (Engels)[8] auch im Sinne der völligen Gleichgültigkeit gegenüber der Natur dieser Gegenstände, für welche sie charakteristisch ist. Genau gesagt, irgendeiner Sammlung von Dingen mag eine beliebige bestimmte Zahl entsprechen, aber ein und derselben Zahl entsprechen höchst verschiedenartige Sammlungen von Dingen.

Allein, all das gibt uns noch nicht die Möglichkeit, wenigstens genau zu bestimmen, was die Zahl 5 ist. Um uns dieser Definition zu nähern, versuchen wir zu klären, was das Gemeinsame zwischen der Sammlung von Buchstaben im Wort „cislo“ und der Sammlung von Buchstaben im Wort „bukva“ ist. Es ist unschwer zu sehen, nachdem man diese Wörter untereinander geschrieben hat –

$$\begin{array}{ccccc} b & u & k & v & a \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ c & i & s & l & o \end{array}$$

–, dass man jeden Buchstaben der oberen Sammlung mit einem der unteren und umgekehrt in Übereinstimmung bringen kann, und dies zudem so, dass verschiedenen[9] Buchstaben der oberen Sammlung verschiedene Buchstaben

8 Anm. d. Ü.: Friedrich Engels: Dialektik der Natur. In: MEGA² I/26, S. 108; MEW, Bd. 20, S. 522.

9 Dabei werden alle Elemente jeder Sammlung als unterschiedliche gezählt. So muss man zum Beispiel bei dem Wort „slóvo“ (Wort) das eine o von dem anderen unterscheiden (sonst werden in diesem Wort nicht fünf, sondern nur vier von uns unterschiedene Buchstaben sein). Dies kann man machen, indem man das erste o als das „mittlere“ bezeichnet, das zweite o als das „äußere“ (damit man auf dieser Stufe noch keinen Gebrauch von den Zahlworten macht). Es wäre auch möglich, die Unterschiede ihrer Aussprache auszunutzen. Im Allgemeinen muss die Fähigkeit, Dinge zu unterscheiden und zu identifizieren, der Bestimmung ihrer Zahl vorangehen.

der unteren, aber verschiedene Buchstaben der unteren verschiedenen Buchstaben der oberen entsprechen werden. Diese Übereinstimmung heißt in der Mathematik *umkehrbar eindeutig*. Für ihre Feststellung ist es nicht erforderlich, die Zahl der Dinge jeder Sammlung zu kennen, sondern nur, sie gegenseitig in Übereinstimmung bringen zu können. Allein, die Feststellung einer solchen Übereinstimmung gibt uns die Möglichkeit, die *Gleichzahligkeit* zweier Mengen zu bestätigen. Wenn wir also wissen, dass im Theater die Vorstellung vor ausverkauftem Hause gegeben wurde, es aber niemanden ohne Sitzplatz gab, dann können wir, selbst wenn wir die Zahl der Plätze im Theater und der verkauften Eintrittskarten nicht kennen, behaupten, dass an diesem Tag die Zahl der Zuschauer der Zahl der Plätze im Theater gleich war. Derart kann man die Gleichheit zweier Zahlen feststellen, ohne diese Zahlen selbst zu kennen: Wir haben nämlich schon die Möglichkeit, den Begriff der *Gleichzahligkeit* zweier Mengen zu definieren, wenngleich wir noch nicht die für sie charakteristische *Zahl* bestimmen können. Wir werden nämlich sagen, dass zwei Mengen gleichzahlig sind – manchmal auch gleichmächtig genannt –, wenn man sie in gegenseitige umkehrbar eindeutige Übereinstimmung bringen kann.

Nun haben wir aber auch die Möglichkeit, unsere Zahl 5 zu definieren. Was haben nämlich alle gleichmächtigen Mengen gemeinsam? Jeder x-beliebige Mensch, der schon zählen und vom Rechnen Gebrauch machen kann, sagt natürlich, dass alle gleichmächtigen Mengen durch ein und dieselbe Zahl charakterisiert sind und dass umgekehrt zwei beliebige Mengen, die durch ein und dieselbe Zahl charakterisiert sind, gleichmächtig sind. In diesem Fall kann die Zahl aber als die gemeinsame Eigenschaft aller einander gleichmächtiger Mengen definiert werden. Was die Zahl 5 betrifft ist klar, dass es hinreichend ist, zum Beispiel die Menge der Finger der menschlichen Hand zu wählen, um die Zahl 5 als gemeinsame Eigenschaft aller Mengen, die dieser gleichmächtig sind, zu definieren. Folglich ist die Zahl 5 die gemeinsame Eigenschaft aller der Menge der Finger der menschlichen Hand gleichmächtigen Mengen. Ebenso wie die Zahl 4 als gemeinsame Eigenschaft aller Mengen definiert werden kann, die zum Beispiel der Menge der Ecken des Quadrats gleichmächtig sind, oder die Zahl 2 als gemeinsame Eigenschaft aller Mengen, die der Menge der Füße beim Menschen gleichmächtig sind u. s. w. u. s. f.

2. Transitivität und Symmetrie

Allein, es ist klar, dass mit einer solchen Definition Probleme zusammenhängen können. Ich kann ja tatsächlich die Zahl 5 definieren als die gemeinsame Eigenschaft aller der Menge der Finger der menschlichen Hand gleichmächtigen Mengen und als gemeinsame Eigenschaft derjenigen Mengen, die der Gesamtheit der Erdteile gleichmächtig sind, und noch auf viele andere Arten, indem man aus der ganzen Klasse der einander gleichmächtigen Mengen eine von ihnen als Vertreter wählt. Wo haben wir die Garantie, dass all diese „Definitionen" wirklich ein und dieselbe Klasse, ein und dieselbe Gesamtheit einander äquivalenter Mengen von Dingen bestimmen? Wenn wir zum Beispiel die Klasse von Mengen hätten definieren wollen, die *größer* als eine Gegebene sind, dann hätten wir dies nicht durch die Angabe eines *beliebigen* Elementes dieser Klasse tun können, da wir, wenn wir bloß wissen, dass zu der Klasse von Mengen, die größer als die Gegebene sind, eine Menge aus fünfzehn Elementen gehört, nicht entscheiden können, ob zu dieser Klasse auch irgendeine Menge aus vierzehn Elementen gehört.

Es ist überhaupt klar, dass eine Klasse von Dingen b, die in einem gegebenen Verhältnis R zu dem Ding a steht, durch die Wahl dieses letzteren definiert wird. So wird z. B. die Klasse derjenigen ganzen Zahlen, die durch a teilbar sind, durch die Zahl a definiert. Wurde für a die Zwei gewählt, erhalten wir dadurch die Klasse aller geraden Zahlen, wurde die Drei gewählt, die Klasse der Vielfachen der Drei u. s. w.; allein, umgekehrt definiert die Angabe eines beliebigen Elementes b jeder solchen Klasse, allgemein gesprochen, noch nicht diese Klasse. So können wir, wenn wir zum Beispiel bloß wissen, dass zu irgendeiner aus unseren Klassen die Zahl 6 gehört, noch nicht wissen, ob die Rede von der Klasse der geraden Zahlen oder von der Klasse der Vielfachen der Drei oder der Sechs ist. Für das Verhältnis der Gleichmächtigkeit besteht diese Gefahr jedoch nicht. Hier kann jede Menge nur zu einer Klasse einander gleichmächtiger Mengen von Dingen gehören, und darum ist es hinreichend, auf ein beliebiges Element irgendeiner Klasse einander gleichmächtiger Mengen hinzuweisen, damit diese ganze Klasse definiert ist.

Das hängt mit den besonderen Eigenschaften der Gleichmächtigkeit zusammen, und zwar damit, dass, wenn zum Beispiel die Menge der Finger der menschlichen Hand der Menge der Erdteile gleichmächtig ist, dann auch umgekehrt die Menge der Erdteile der Menge der Finger der menschlichen Hand gleichmächtig ist und außerdem jede beliebige Menge, die einer von ihnen gleichmächtig ist, auch der anderen gleichmächtig ist. Das Verhältnis der Gleichmächtigkeit ist, wie man in der Mathematik sagt, *symmetrisch* und *transitiv*. (Wenn daraus, dass ein Gegenstand *a* sich zu dem Ding *b* in dem Verhältnis *R* befindet – *aRb* –, folgt, dass auch der Gegenstand *b* in dem Verhältnis *R* zu dem Gegenstand *a* steht – *bRa*, dann wird das Verhältnis *R symmetrisch* genannt. Es ist keineswegs jedes beliebige Verhältnis symmetrisch. So ist das Verhältnis der Ähnlichkeit natürlich symmetrisch, aber das Verhältnis „Sohn von“ zum Beispiel besitzt diese Eigenschaft nicht. Denn daraus, dass „*a* Sohn von *b* “ ist, folgt unmöglich, dass „*b* Sohn von *a*“ ist. *Transitiv* wird dasjenige Verhältnis genannt, für welches aus *aRb* und *bRc* folgt, dass *aRc*. So ist, wenn *a b* „ähnlich“ ist, *b* aber *c* „ähnlich“ ist, auch *a c* „ähnlich“. Wenn aber „*a* Sohn von *b*“ ist, hingegen „*b* Sohn von *c*“ ist, dann ist *a* keineswegs „Sohn von *c*“.) Eben diese Besonderheiten des Verhältnisses der Gleichmächtigkeit gestatten uns, aus den einander gleichmächtigen Mengen eine *beliebige* als Vertreterin aller aus dieser Klasse auszuwählen. Dabei ist es vollkommen gleichgültig, welche aus allen gleichmächtigen Mengen als Vertreterin der ganzen Klasse gewählt wird – irgendeine zu wählen ist aber unabdingbar.

3. Logisches und Historisches in der Definition der Zahl

Die von uns hier angeführte Definition der Zahl (einstweilen nur der einzelnen individuellen Zahlen, nicht aber der Zahl überhaupt, geschweige denn ihrer ganzen Reihe) stammt von Cantor und Frege. Wir sehen, dass sie die Existenz von *Dingen und einer Gesamtheit* von Dingen (Mengen) voraussetzt, dass die Zahl 5 nicht definiert werden darf, ohne eine der Sammlungen, die genau 5 Gegenstände besitzt, zu zeigen, und dass es für die Definition der Zahl unabdingbar ist, nicht nur zu verstehen, sondern auch zu handeln: Man muss die Dinge miteinander in Übereinstimmung bringen können, wofür man sie jedoch *unterscheiden und identifizieren* können muss. Dass all dies bei weitem keine einfache Aufgabe darstellt, bezeugen ebenso die Geschichte des Rechnens wie auch die Methoden des Zählens bei den Menschen der Urkulturen. „Der Irrtum besteht darin,“ – schreibt Levy-Bruhl – „sich den ‚menschlichen Geist‘ so vorzustellen, als ob er die Zahlen zum Zählen *konstruiere*, während im Gegenteil die Menschen zuerst mühsam und mit großem Kraftaufwand zählen, bevor sie den Begriff der Zahl als solcher erfassen.“[10]

[10] Anm. d. Ü.: Lucien Levy-Bruhl: Das Denken der Naturvölker, übers. v. W. Jerusalem, Wien, Leipzig 1921, S. 178 (Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures, Paris 1910). Vgl. a. a. O., S. 176: „Kurz – so paradox dieser Schluß auch scheinen mag, er ist dennoch wahr – in den niedrigen Gesellschaften hat der Mensch durch lange Zeiten hindurch gezählt, bevor er Zahlen gehabt hat.“ – Anführungszeichen bei ‚menschlicher Geist‘ von S. J.

Um aufzuzeigen, wie verwickelt diese Operation bei Fehlen einer entsprechenden Praxis war und wie sich die Fähigkeit, Dinge miteinander in Übereinstimmung zu bringen (auf den ersten Stufen dabei gerade Dinge mit Dingen, nicht aber Dinge mit Zahlen) als unabdingbares Moment erweist, führe ich ein Beispiel von Levy-Bruhl an, das offenbar der kolonisatorischen Praxis der weißen „Zivilisatoren" entlehnt ist.

Levy-Bruhl schreibt: „Hier ein von den Dayaks auf Borneo genommenes Beispiel. Es handelt sich darum, eine bestimmte Anzahl von Dörfern, die sich empört, dann unterworfen hatten, den Betrag der Buße, die sie zu zahlen hatten, wissen zu lassen. Wie wird sich der Eingeborene, der die Botschaft zu überbringen hat, benehmen? Er brachte einige trockene Blätter, die er in Stücke teilte; aber ich vertauschte sie ihm der Bequemlichkeit halber mit Papier. Er ordnete die Stücke eines neben dem anderen auf dem Tische an und bediente sich gleichzeitig seiner Finger, um bis zehn zu zählen; hierauf stellte er seinen Fuß auf den Tisch und zählte jede seiner Zehen gleichzeitig mit je einem Papierzettel, der dem Namen eines Dorfes mit dem Namen seines Häuptlings, der Anzahl seiner Krieger und der Höhe seines Strafgeldes entsprach. Nachdem er mit seinen Zehen fertig geworden war, begann er wieder mit seinen Fingern. Am Schlusse meiner Liste gab es 45 Stücke Papier, die auf dem Tische angeordnet waren. Da bat er mich, noch einmal meine Botschaft zu wiederholen, was ich tat, während er selbst die Papierstücke und seine Finger und seine Zehen ebenso wie früher durchging. ‚Das', sagte er, ‚sind unsere Buchstaben; ihr anderen Weißen, ihr lest nicht wie wir.' Spät am Abend wiederholte er korrekt das Ganze, indem er die Finger auf jeden Papierzettel, einen nach dem anderen, legte".[11]

Wenn wir uns heutzutage keineswegs immer darüber Rechenschaft ablegen, dass die Definition der (Kardinal-)Zahl das wirkliche Vorhandensein einer gewissen Menge von Dingen voraussetzt, für die diese Zahl charakteristisch ist und die sozusagen als gemeinsames Äquivalent aller ihr gleichmächtigen Mengen dient, dann hat das seinen Ursprung darin, dass für uns in der Rolle der „Dinge", deren Gesamtheit diese äquivalenten Mengen bilden, die Zahlzeichen 1, 2, 3, 4, 5 ... selbst auftreten, denen wir auch im Prozess des

[11] Levy-Bruhl: Das Denken der Naturvölker" [« Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures », Paris 1910, S. 214f. [S. J. interpretiert « lettres » bei Levy-Bruhl als „Buchstaben", der Übersetzer Jerusalem (Das Denken der Naturvölker, Wien, Leipzig 1921, S. 162f.) hingegen als „Briefe" – d. Ü.] Das zitierte Beispiel zeigt gerade, dass es keinerlei besondere „Ur"-Denkweise gibt: Die logische Grundlage des Zählens ist bei den Menschen der Urkulturen und bei der zeitgenössischen Mathematik ein und dieselbe – die Herstellung einer umkehrbar eindeutigen Übereinstimmung.

Zählens die Gegenstände, die gezählt werden, zurechnen. Die Reihe der Zahlen, die von ihrer ursprünglichen gegenständlichen Bedeutung befreit worden ist, die von ihrer Beziehung zu irgendwelchen bestimmten Mengen von Dingen zeugte, die die Rolle der Standards spielten, zum Beispiel zu den Fingern und den Zehen, zu den Knochen u. s. w., tritt dabei auf, als ob sie den Dingen voranging, als ob sie vor jeglichem Zählen existierte und sogar als Zwischenstufe für die Einführung der Übereinstimmung zwischen Mengen von Dingen unabdingbar wäre. So kommt beim Setzen von Bäumen in Gruben die umkehrbar eindeutige Übereinstimmung zwischen der Menge der Bäume und der der Gruben zustande. Allein die Gleichmächtigkeit dieser beiden Mengen prüft man für gewöhnlich vorher, indem man jede von ihnen für sich zählt.

Die echte materialistische Definition der Zahl kann folglich nur eine dialektische sein, die die Dialektik der Begriffsentwicklung offenlegt: diese Entwicklung beginnt mit den realen Mengen von Dingen, für welche die Zahl als Äquivalent dient, und endet mit dem Moment, an dem sich – mit Marx gesprochen – „die Rollen umkehren“[12] und die Zahl nicht mehr als von den Mengen ihrer Charakteristik abgeleitet auftritt, sondern als etwas, das diesen Mengen vorangeht. Für denjenigen, der diese Dialektik der Entwicklung nicht sieht, der die Zahlen sogleich als sogenannte natürliche Reihe betrachtet, als den Dingen und ihren Mengen – wie diese auch beschaffen seien – vorangehend, muss der Begriff der Zahl zwangsläufig von einem mystischen Schleier des Geheimnisses umhüllt sein und als im Kopfe aus reinem Denken entstanden erscheinen. In Wirklichkeit jedoch „ist der Begriff der Zahl ... nirgend anders hergenommen, als aus der wirklichen Welt. Die zehn Finger, an denen die Menschen das zählen, also die ersten arithmetischen Operationen vollziehn gelernt haben, sind alles Andre, nur nicht eine freie Schöpfung des Verstandes. Zum Zählen gehören nicht nur zählbare Gegenstände, sondern auch schon die Fähigkeit, bei Betrachtung dieser Gegenstände von allen ihren übrigen Eigenschaften abzusehn außer ihrer Zahl – und diese Fähigkeit ist das Ergebniß einer langen geschichtlichen erfahrungsmäßigen Entwicklung ... Wie alle andern Wissenschaften ist die Mathematik aus den *Bedürfnissen* der Menschen hervorgegangen[: aus der Messung von Land und Gefäßinhalt, aus Zeitrechung und Mechanik]. Aber wie in allen Gebieten des Denkens werden auf einer gewissen Entwicklungsstufe die aus der wirklichen Welt abstrahirten Gesetze von der Welt getrennt, ihr als etwas selbständiges gegen-

[12] Anm. d. Ü.: Vgl. Karl Marx: Über das Differential. Erster Entwurf. In: Ders., Mathematische Manuskripte, Kronberg 1974, S. 86: „dieser Umschlag, diese Umkehrung der Rollen“.

übergestellt, als von Außen kommende Gesetze, wonach die Welt sich zu richten hat.“[13]

Abschließend können wir sagen:

1. Damit der Begriff der Zahl entstehen konnte, war das Vorhandensein realer Dinge und ihrer Gesamtheiten (Mengen) und das wirkliche Verhalten des Menschen zu ihnen, das in der Fähigkeit besteht, die Dinge zu Mengen zu kombinieren, im Innern der Mengen als ganzen die einzelnen Elemente zu unterscheiden und diese Mengen miteinander in Übereinstimmung zu bringen, unabdingbar.

2. Allein, nachdem sie einmal entstanden sind, treten die Zahlen im weiteren selbst auf als Standards der Mengen von Dingen, auf welche beim Zählen die Elemente der zu zählenden Mengen bezogen werden. Und dieser „Umschlag in der Methode“,[14] der historisch mit der Verwandlung der Zahlen aus Charakteristika gewisser einander gleichmächtiger Mengen in gesonderte, vor allen Dingen und ihren Mengen existierende „Dinge“ verknüpft ist, führt bei metaphysischer Denkweise, für welche das Logische nicht das Historische einschießt, d. h. die Definition des Gegenstandes nicht die Geschichte seiner Entstehung und Entwicklung einschließt, unvermeidlich in die Mystik. Auf eine solche Zahlenmystik treffen wir bei allen Völkern, bei denen die Zahlwörter nicht mehr als Benennung irgendwelcher bestimmter Gesamtheiten von Dingen existieren, sondern gerade als *Zahlworte*. Man sollte sich zumindest an die Zahlenmystik der Pythagoreer erinnern mit ihrer Vorstellung von der Zahl als etwas, das sich „in der Mitte zwischen dem Sinnlichen und dem Gedanken“[15] befindet.

[13] F. Engels: Anti-Dühring [MEGA² I/27, S. 246 – d. Ü.].

[14] Anm. d. Ü.: Vgl. Marx: Über das Differential, a. a. O., S. 64f., sowie Über das Differential. Erster Entwurf, ebenda, S. 86.

[15] Anm. d. Ü.: Ohne Angabe von Autor und Quelle. Vgl. Aristoteles: Metaphysik, Buch 11, Kap. 1 (1059b7): „Das Mathematische setzen sie … nämlich in die Mitte zwischen die Ideen und das sinnlich Wahrnehmbare, als ein Drittes außer den Ideen und dem Diesseitigen …“ Zitiert bei Wladimir I. Lenin: Konspekt zur „Metaphysik“ des Aristoteles. In: Werke, Bd. 38, S. 350, und Georg W. F. Hegel: Vorlesungen, Ausgewählte Nachschriften und Manuskripte, Bd. 7, Hamburg 1989, S. 30: „Aristoteles sagt in seiner Metaphysik, Plato habe angegeben, daß sich das Mathematische außerhalb des Sinnlichen und außerhalb der Idee befinde. Es sei metaxy, zwischen beiden“; vgl. auch ders., Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie, Theorie-Werkausgabe, Bd. 18, Frankfurt a. M. 1971, S. 194: „Die Zahl ist nicht sinnlich, auch nicht der reine Gedanke: ein sinnlich unsinnliches.“ u. S. 236: „Die Zahl ist also nicht sinnlich, aber auch noch nicht der Gedanke.“

4. Die Analogie zwischen Zahl und Wert

Den Lesern wird die Ähnlichkeit der allgemeinsten Züge der Entwicklung des Zahlbegriffs, die mit der Gleichmächtigkeit *zweier* Mengen beginnt und mit der Menge der Zahlen, die als den Dingen und ihren Mengen vorangehend auftritt, endet, mit dem allgemeinen Gang der Ideen im ersten Kapitel des „Kapitals“ nicht entgangen sein. Und daran ist nichts Verwunderliches. Die von Marx im „Kapital“ verwendete Methode charakterisierend, schrieb Lenin: „Dieser Art muss auch die Methode der Darstellung (resp. Erforschung) der Dialektik überhaupt sein (denn die Dialektik der bürgerlichen Gesellschaft bei Marx ist nur ein spezieller Fall der Dialektik).“[16] Die Frage, ob dieselbe Methode auch auf die Mathematik anwendbar ist, konnte tatsächlich, insbesondere infolge ihres abstrakten Charakters, Zweifel hervorrufen. Allein, aus den jüngst veröffentlichten mathematischen Manuskripten Marxens erhellt, dass er sie im positiven Sinn entschied. Denn die Methode, die von ihm verwendet wird, ist dieselbe, deren er sich im „Kapital“ bediente. Als er es sich zur Aufgabe macht, die Differentialrechnung zu begründen, beginnt Marx „mit dem Einfachsten, Gewöhnlichsten, Augenscheinlichsten“ – mit der gewöhnlichen Algebra und dabei mit der einfachen Summe und der Differenz zweier Zahlen, wobei er „in dieser einfachsten Erscheinung ... *alle* Widersprüche (resp. die Keime *aller* Widersprüche)“[17] der Differentialrechnung aufdeckt. Mehr als das, die Darstellung selbst der Dialektik der Entwicklung des Differentials erinnert (selbstverständlich nur in ihren allgemeinsten Zügen) an den allgemeinen Gang des Geldbegriffs im „Kapital“. Die Differentialsymbole entstehen anfangs als symbolische Äquivalente gewisser realer algebraischer Prozesse und erst im Laufe der weiteren Entwicklung tauschen sie ihre Rollen: Wenn wir den eigenen Boden der Differentialrechnung betreten, wird nicht ein realer Prozess zum Ausgangspunkt, sondern das (ihm äquivalente) Differentialsymbol.[18] Und Marx zeigt, wie die Vergessenheit dieser dialektischen

---

[16] Lenin, a. a. O., S. 340.

[17] Ebenda.

[18] Anm. d. Ü.: Marx, Über das Differential, a. a. O., S. 64f.: „[Die Differentialsymbole] sind einseitig zur Welt gekommen, Schattenfiguren ohne Körper, der sie geworfen, symbolische Differentialkoeffizienten ohne realen Differentialkoeffizienten, d. h. ohne entsprechende äquivalente «Abgeleitete». Der symbolische Differentialkoeffizient wird so zum selbständigen Ausgangspunkt, dessen reales Äquivalent erst zu finden ist. So ist die Initiative von dem rechten Pol, dem algebraischen, auf den linken, den symbolischen, verschoben. Damit erscheint aber auch der Differentialcalculus als eine spezifische Rechnungsart, die bereits selbständig auf ihrem eignen Boden operiert. Denn seine Ausgangspunkte du/dx, dz/dx sind nur ihm angehörige und ihn charakterisierende mathematische Größen. Und dieser Umschlag in der Methode ergab

Entwicklung des Differentials und der Versuch, *sogleich* mit diesem Begriff als einem schon fertigen im Voraus gegebenem Symbol metaphysisch zu beginnen, in die Mystik unendlich kleiner Größen führen, die als von einer besonderen, geheimnisvollen Art angesehen werden (die „mystische Differentialrechnung" Newtons und Leibnizens). Es ist nicht verwunderlich, dass sich dieselbe Methode auch in bezug auf den einfachsten mathematischen Ausgangsbegriff – die Kardinalzahl – anwenden lässt und dass sich auch die Dialektik der Entwicklung des Zahlbegriffs als ein Spezialfall der Dialektik im Allgemeinen erweist. Mehr als das:

1) Marx beginnt das „Kapital" mit dem Tausch von Waren, die ungeachtet der vollkommenen Verschiedenartigkeit ihrer Natur einander gleichgesetzt werden.

Die von uns vollzogene Analyse der Zahl beginnt mit der Feststellung der Gleichmächtigkeit zweier Mengen, vollkommen unabhängig von der besonderen Natur der in diesen Mengen enthaltenen Elemente.

2) Als die gemeinsame Charakteristik aller Waren, die miteinander getauscht werden, erweist sich ihr *Wert* („das Gemeinsame, das sich im Austauschverhältniß oder Tauschwerth der Ware darstellt, ist also ihr Werth"[19]).

Als gemeinsame Eigenschaft aller einander gleichmächtigen Mengen von Dingen erweist sich ihre *Zahl*, d. h. etwas Drittes, von allen diesen Mengen verschiedenes (denn die Zahl ist nicht einfach jene konkrete Menge von Objekten, die für die Definition unabdingbar ist, sondern gerade die gemeinsame Eigenschaft aller dieser Menge gleichmächtigen Mengen von Dingen)[20].

3) Die Entwicklung der Wertform („von seiner einfachsten unscheinbarsten Gestalt bis zur blendenden Geldform") beginnt mit „der einfachen, einzelnen oder zufälligen Wertform" als Verhältnis zwischen zwei Waren A und B, die miteinander getauscht werden, und geht über die „totale oder entfaltete

sich hier als Resultat der algebraischen Differentiation von uz. Die algebraische Methode schlägt also von selbst in die ihr entgegengesetzte Differentialmethode um."

19 Anm. d. Ü.: Vgl. Karl Marx: Das Kapital. Erster Band. In: MEGA² II/8, S. 70.

20 Allein, man muss sich fest einprägen, dass man zu dieser Zeit als Arithmetik nicht irgendwelche Dinge und die Verhältnisse zwischen ihnen in ihrer Spezifik – d. h. als gerade für ein gewisses, aber kein anderes Gebiet der Wirklichkeit spezifische – studierte, sondern sie von einer rein quantitativen Seite betrachtete; – die Politische Ökonomie kann sich nicht damit begnügen, die Fakten des Austauschs verschiedener Waren und das Vorhandensein einer gemeinsamen Charakteristik bei ihnen – des Wertes – zu konstatieren, sondern muss die Frage nach dem Grund, der diese Gemeinsamkeit hervorbringt, stellen, d. h. nach der Arbeit, gleichwie die Frage, warum die Arbeit sich im Wert ausdrückt und in welcher Gesellschaft dies geschieht.

Wertform“ bis zur „allgemeinen“ Wertform[21], die als erste wirklich zum Ausdruck bringt, was die gegebene Ware mit allen anderen Waren gemeinsam hat. Schon bei dieser „totalen oder entwickelten Wertform“, welche sich in der Gleichung ausdrückt: „z Ware A = u Ware B = v Ware C oder = w Ware D oder = x Ware E oder = etc. (20 Ellen Leinwand = 1 Rock oder = 10 Pfd. Tee oder = 40 Pfd. Kaffee oder = 1 Quarter Weizen oder = 2 Unzen Gold oder 1/2 Tonne Eisen oder = etc.)“, fällt der zufällige Charakter des Verhältnisses zweier individueller Warenbesitzer weg. Nun kann dank der Symmetrie des Tauschverhältnisses – d. h. die Gleichung, die die Gleichheit einer gewissen Quantität der Ware *A* zu einer gewissen Quantität der Ware *B* zum Ausdruck bringt, ist umkehrbar – die „allgemeine“ Wertform entstehen, und der Wert aller Waren, die miteinander getauscht werden, kann im Wert einer von ihnen, die als „allgemeines Aequivalent“dient, ausgedrückt werden. Und weiter: „die Ware, die sich auf die Rolle, das allgemeine Äquivalent zu sein, spezialisiert hat, wird von allen anderen Waren aus ihrer Mitte ‚ausgestoßen‘“, und diese spezifische Warenart wird zur Geldware oder funktioniert als *Geld*.[22]

Die Entwicklung des Zahlbegriffs, die von uns in ihren allgemeinen Zügen angegeben worden ist, beginnt ebenfalls mit der Feststellung der einfachen einzelnen Wechselbeziehung der Gleichmächtigkeit zwischen *zwei* einzelnen Mengen von Dingen. Um von ihr zu dem Begriff der Zahl zu gelangen, muss man schon die „entfaltete“ Form passieren (und zeigen, dass die Menge *A* auch der Menge *C* gleichmächtig ist, wenn die Menge *A* der Menge *B* gleichmächtig ist und die Menge *B* ihrerseits der Menge *C*). Und erst dann, wenn die Symmetrie des Verhältnisses der Gleichmächtigkeit gezeigt worden ist, d. h. gerade die Eigenschaft, dass, wenn *A B* gleichmächtig ist, dann auch umgekehrt *B A* gleichmächtig ist, erhalten wir die Möglichkeit, das Gemeinsame, was für alle einander gleichmächtigen Mengen charakteristisch ist, mit Hilfe einer von ihnen, die für sie die Rolle des „allgemeinen Äquivalents“ spielt, auszudrücken. Schließlich vollendet die Verwandlung der Menge solcher „allgemeinen Äquivalente“,[23] die auf diesem Wege entstanden ist, in die „aus der Mitte“ der anderen Mengen von Dingen „ausgeschlossene“ Standardmenge der Zahlzeichen (oder Zahlwörter), die für das Zählen der Dinge

[21] Anm. d. Ü.: Vgl. ebenda, S. 79, 92 und 94.

[22] Anm. d. Ü.: Vgl. ebenda, S. 92 und 98. Siehe S. 98: „Umgekehrt ist die Waare, die als allgemeines Aequivalent figurirt, von der einheitlichen und daher allgemeinen relativen Werthform der Waarenwelt ausgeschlossen.“

[23] Im Grunde haben letztgenannte – wenngleich schon standardisiert – aber noch einen gegenständlichen Charakter. Und zwar werden sie mit Hilfe der Körperteile („pjat’“ (fünf) von „pjast’“ (Mittelhand); vgl. „zapjast’“ (Handgelenk)!) oder auch mit Hilfe von Strichelchen oder Stöckchen dargestellt.

die Rolle des „allgemeinen Äquivalents" spielt, diesen Prozess der *logischen* Entwicklung des Begriffs der (Kardinal-)Zahlen. Und dieser Prozess der *logischen* Entwicklung spiegelt auch den der *historischen* Entwicklung wider, dem analog, wie dies auch in bezug auf den Geldbegriff im „Kapital" stattfindet.

Ich wiederhole, hier liegt *keine einfache Analogie* vor, sondern eine Methodengemeinsamkeit. Und dadurch ist umso mehr begründet, weshalb jeder Versuch, einfach eine Analogie aufzustellen und die spezifischen Besonderheiten der Politischen Ökonomie einerseits, der Arithmetik andererseits zu vergessen, nicht nur unvermeidlich zum Scheitern verurteilt ist, sondern auch im direkten Widerspruch zur Methode des dialektischen Materialismus steht und deshalb zu offensichtlich falschen Schlüssen führt. So führt zum Beispiel das Bestreben, die *Analogie* zwischen der Definition des Werts und der Definition des Gewichts, auf welche Marx selbst hinweist, *zu verlängern*, dazu, dass das rein gesellschaftliche Verhältnis beginnt, wie ein *natürliches* auszusehen, dass „die Vorstellung entsteht, dass der Rock seine Äquivalentform, seine Eigenschaft unmittelbarer Austauschbarkeit, ebenso sehr von Natur aus besitzt, wie das Eisen das Gewicht und die Wärmekapazität besitzt".[24] So tritt dabei zum Beispiel das Gold, das die Rolle des allgemeinen Warenäquivalents spielt, als *von Natur aus* mit diesen besonderen Eigenschaften ausgestattet auf und erzeugt auf diese Weise das Rätsel des Geldes, das für den rohen bürgerlichen Ökonomen, der nicht den *gesellschaftlichen* Charakter der Kategorie des Werts sieht, unlösbar ist.

Die Spezifik der Politischen Ökonomie als einer Wissenschaft, die gerade die *gesellschaftlichen* Verhältnisse studiert, tritt für jeden, der sich dem ersten Kapitel des „Kapitals" zuwendet, drastisch hervor. Die Methode des dialektischen Materialismus zeichnet sich auch dadurch aus, dass sie, obgleich sie die einzige allgemeine Methode ist, in Anwendung auf jedes besondere Gebiet der Wirklichkeit eine spezifische Form annimmt. Wenn wir hier dem Moment der Allgemeinheit der Methode die Aufmerksamkeit zuwandten, dann taten wir dies, um anschaulich zu zeigen, dass die von der Mathematik am Ende des 19. Jahrhunderts in der Sache der Begründung des Zahlbegriffs erreichten

[24] Anm. d. Ü.: Vgl. ebenda, S. 87: „Hier hört die Analogie jedoch auf. Das Eisen vertritt im Gewichtsausdruck des Zuckerhuts eine beiden Körpern gemeinsame Natureigenschaft, ihre Schwere, – während der Rock im Werthausdruck der Leinwand eine übernatürliche Eigenschaft beider Dinge vertritt, ihren Werth, etwas rein Gesellschaftliches." Ebenda, S. 88: „scheint auch der Rock seine Aequivalentform, seine Eigenschaft unmittelbarer Austauschbarkeit, ebenso sehr von Natur aus zu besitzen als seine Eigenschaft schwer zu sein oder warm zu halten."

Erfolge die Richtigkeit der materialistischen Dialektik objektiv bestätigen und sich als Resultate einer elementaren Anwendung gerade dieser Methode darbieten. Damit dies noch anschaulicher hervortritt, damit sich wirklich zeigt, dass die Züge der Ähnlichkeit in der Entwicklung des Begriffs der Zahl einerseits und des Geldes andererseits nicht als eine einfache oberflächliche Analogie erscheinen, müssen wir uns ein wenig ausführlicher mit der sogenannten Definition „durch Abstraktion“, mit deren Hilfe auch der Zahlbegriff eingeführt worden ist, befassen.

§ 2. Über die Definition „durch Abstraktion“

1. Die Rolle der Gleichheit bei der Bildung abstrakter Begriffe

Um den Begriff der Zahl der Dinge irgendeiner Menge zu erhalten, muss man von der speziellen Natur dieser Dinge vollständig abstrahieren und nur ihre Anzahl bewahren. Die Zahl ist somit das Ergebnis einer Abstraktion. Allein, den Prozess selbst der Abstraktion oder des Absehens darf man dabei nicht vereinfacht verstehen, d. h. so, wie ihn für gewöhnlich die Empiriker verstehen: Gegeben ist ein Ding x, das die Eigenschaften a, b, c und d besitzt; um die Eigenschaft d in reiner Gestalt abzusondern, reiche es aus, einfach die Eigenschaften a, b und c fallen zu lassen. In dem Artikel „Idealismus und Mathematik“[25] haben wir gezeigt, dass man, um in reiner Gestalt das *Verhältnis* zwischen Dingen abzusondern, diese Dinge nicht einfach fallen lassen darf, sondern sie zu Veränderlichen machen muss. Wenn wir nicht imstande wären, die Welt zu *verändern*, könnten wir sie nicht *erkennen*. Nun wird bei uns auch von der Absonderung (oder dem Abstrahieren) in reiner Gestalt nicht eines Verhältnisses, sondern einer Eigenschaft der Dinge die Rede sein.

Um zu zeigen, wie dies vor sich geht, beginnen wir mit einem Beispiel, das von Marx angeführt wird. Es möge uns obliegen, das Gewicht eines Zuckerhuts festzustellen. Da wir allein sein Gewicht bestimmen wollen, müssen wir natürlich von allen anderen Eigenschaften außer der der Schwere abstrahieren. Wie setzen wir diese Abstraktion in die Tat um? „Ein Zuckerhut, weil Körper, ist schwer, und hat daher Gewicht, aber man kann keinem Zuckerhut sein Gewicht {unmittelbar} ansehen {oder anfühlen}. Wir nehmen nun verschiedene Stücke Eisen, deren Gewicht vorher bestimmt ist. Die Körperform des Eisens, für sich betrachtet, ist eben so wenig Erscheinungsform der Schwere als die des Zuckerhuts. Dennoch, um den Zuckerhut als Schwere auszudrücken, setzen wir ihn in ein Gewichtsverhältniß zum Eisen. *In diesem Verhältnis* gilt das Eisen als ein Körper, der *nichts* darstellt *außer Schwere*.

[25] Front Nauki i Techniki, H. 5–6, 1934, S. 43–51.

Eisenquanta dienen daher zum Gewichtsmaß des Zuckers und repräsentiren dem Zuckerkörper gegenüber bloße Schwergestalt, Erscheinungsform der Schwere. Diese Rolle spielt das Eisen *nur innerhalb dieses Verhältnisses*, worin der Zucker, oder irgend ein anderer Körper, dessen Gewicht gefunden werden soll, zu ihm tritt."[26]

Um von allen Eigenschaften des Zuckerhuts außer der Schwere zu abstrahieren, lassen wir sie nicht einfach mit der Ausnahme dieser einen fallen, was in Anbetracht ihrer Zahllosigkeit einfach unmöglich wäre, sondern setzen folglich den gegebenen Gegenstand einem Gegenstand gleich, der, allgemein gesagt, von ihm völlig verschieden und nur in in dem einen, gegebenen Verhältnis gleich ist. Erst in diesem Verhältnis verliert der Gegenstand, der als Äquivalent dient, in unserem Beispiel das Eisen, alle seine konkreten Eigenschaften mit Ausnahme einer, als deren Vertreter er gerade auftritt. Dafür ist es aber unabdingbar, dass er diese Eigenschaft wirklich besitzt. „Wären beide Körper nicht schwer, so könnten sie nicht in dieses Verhältniß treten und das Eine [*könnte*] daher *nicht* zum Ausdruck der Schwere des Andren dienen."[27] Die Eigenschaft geht auf diese Weise dem Verhältnis, durch welches sie umgekehrt abgesondert wird, voran.

Als wesentlicher Zug dieses Abstraktionsprozesses erscheint jener Umstand, dass bei ihm das Verhältnis der Gleichheit eine besondere Rolle spielt. Erst mit seiner Hilfe – indem es unterschiedliche Dinge einander gleichsetzt – sondern wir das Gemeinsame ab, was sie zu Gleichen macht. Gerade so verfuhren wir mit der Zahl, welche wir durch die *Gleichzahligkeit* definiert haben, d. h. durch ein Verhältnis vom Typ der Gleichheit. Ebenso gelangte Marx zum Begriff des Werts als zu dem „Gemeinsame[n], was sich im Austauschverhältnis oder im Tauschwert der Ware darstellt"[28]. Das Tauschverhältnis, in welchem ein Gegenstand gegen sein Äquivalent ausgetauscht wird, ist natürlich auch ein Verhältnis vom Typ der Gleichheit: Im Tausch werden verschiedenartige Gegenstände einander gleichgesetzt.

2. Beispiele

Diese Rolle des Gleichheitsverhältnisses bei der Definition unserer Begriffe ist schon den alten Griechen bekannt gewesen. Gerade mit seiner Hilfe definierte man in der Schule des Eudoxos und Euklids dasjenige, das in der grie-

[26] Anm. d. Ü.: Vgl. ebenda, S. 87. – Hervorhebungen S. J., {unmittelbar} nicht bei Marx, {oder anfühlen} von S. J. ausgelassen.
[27] Vgl. ebenda. – Hervorh. S. J.
[28] Vgl. ebenda, S. 70.

chischen Mathematik die Rolle unserer reellen Zahl spielte – den Begriff des *logos* oder Größenverhältnisses.

Solange die griechischen Mathematiker glauben konnten, dass Größen ein und derselben Art miteinander kommensurabel sind (ein gemeinsames Maß haben), konnten sie das *Verhältnis* zweier Größen ungefähr auf diese Weise definieren:

„Wenn X das gemeinsame Maß zweier Größen A und B ist und wenn $A = mX$ und $B = nX$, dann sagt man, dass das Verhältnis der Größe A zu der Größe B (der Bruch) m/n ist.“ Allein die Entdeckung der Irrationalität machte eine solche Definition unmöglich, weil die Griechen nicht daran zweifeln konnten, dass beispielsweise die Diagonale eines Quadrats sich in einem bestimmten Verhältnis zu seiner Seite befindet, obgleich dieses Verhältnis eben nicht durch irgendeinen Bruch ausgedrückt werden kann. Und da überwand Eudoxos die Schwierigkeit, indem er das „Verhältnis“ durch die „Proportion“ definierte. Dabei ist für die Gleichheit zweier „Verhältnisse“[29] $A : B$ und $C : D$ miteinander kommensurabler Größen notwendig und hinreichend, dass für *jedes* Paar von Zahlen m, n gilt:

1) wenn $mA > nB$, dann ist zugleich auch $mC > nD$;
2) wenn $mA < nB$, dann ist auch $mC < nD$ und schließlich
3) wenn sich erweist, dass $mA = nB$, dann ist auch $mC = nD$.

Allein, dieses Kriterium der Proportionalität von Größen („Gleichheit der Verhältnisse“ $A : B$ und $C : D$) setzt nicht unbedingt die *Existenz eines gemeinsamen Maßes* voraus, d. h. das Vorhandensein eines Zahlenpaares (m, n), für welches gerade der dritte Fall, der Fall der Gleichheit $mA = nB$, statthat. Deswegen kann es auch auf den Fall inkommensurabler Größen ausgedehnt werden.

Nun kann aber die Proportionalität zweier Größenpaare (A, B) und (C, D) mit Hilfe dieses Kriteriums definiert werden, mit einem Wort die „Verhältnisgleichheit“, die sich dabei nicht auf den Begriff des „Verhältnisses“ stützt.

Und wir finden tatsächlich solch eine Definition bei Eudoxos. Allein, nun, wo wir die Reihe der proportionalen Größen $A/B = C/D = E/F = \dots$ haben, können wir eine aus dem Ausdruck auswählen: A/B oder C/D etc. – als Vertreter *der ganzen Reihe* und derart *ein gewisses* „Verhältnis“[30] definieren. Das Verhältnis wäre in diesem Fall durch die Verhältnisgleichheit definiert.

---

[29] Um nicht das geometrische Verhältnis von Größen A : B mit dem allgemeinen Begriff des Verhältnisses von Gegenständen zu verwechseln, setzen wir ersteres in Anführungszeichen.

[30] Die Beschränktheit der Schule des Eudoxos und Euklids kann man jedoch darin sehen, dass sie nicht den Begriff des „Verhältnisses“ überhaupt definierte, sondern sich mit der

Das Verhältnis der *Parallelität* ist ebenfalls ein gewisses Verhältnis vom Typ der Gleichheit. Dabei gilt:

1) wenn die Gerade *a* der Geraden *b* parallel ist, dann gilt umgekehrt, dass die Gerade *b* der Geraden *a* parallel ist, d. h. das Verhältnis der Parallelität ist *symmetrisch*;

2) wenn die Gerade *a* der Geraden *b* parallel ist, die Gerade *b* hingegen der Geraden *c*, dann ist die Gerade *a* der Geraden *c* parallel (*Transitivität*);

3) schließlich ist jede Gerade sich selbst parallel (*Reflexivität* – die dritte Eigenschaft der Gleichheit, die sich bekanntlich dadurch auszeichnet, dass jeder Gegenstand sich selbst *gleich* ist, während kein einziger Mensch beispielsweise sein eigener *Sohn* ist).

Deshalb erwarten wir zu recht, dass sich durch das *Verhältnis* der Parallelität die *Eigenschaft*, die allen parallelen Geraden gemeinsam ist, definieren (genauer: absondern, abstrahieren) lässt. Und tatsächlich erscheint als diese Eigenschaft der Geraden ihre *Richtung*. Die Richtung einer Geraden kann derart durch ihre Parallelität zu anderen Geraden definiert werden.

Die geometrischen Gestalten und Körper besitzen eine bestimmte Form oder *Figur*. Wie kann man die „Figur", d. i. eine gewisse Eigenschaft des Körpers, in reiner Gestalt absondern? Wir tun dies wiederum durch ein *Verhältnis*, nämlich durch das Verhältnis der *Ähnlichkeit*, welches, wie sich leicht überprüfen lässt, alle Eigenschaften unserer „Gleichheit" besitzt. Und somit kann man die „Figur" eines Körpers als gemeinsame Eigenschaft aller einander *ähnlicher* Körper definieren, ganz genau so, wie wir die *Zahl*, die eine gewisse Menge charakterisiert, als gemeinsame Eigenschaft aller dieser Menge *gleichmächtigen* Gegenstandsmengen definierten.

Um schließlich zu zeigen, inwiefern dieses Verfahren der Begriffsbildung einen allgemeinen Charakter besitzt, führen wir noch ein Zitat von Marx an:

„In gewisser Art – schreibt Marx – geht's dem Menschen wie der Waare. Da er weder mit einem Spiegel auf die Welt kommt noch als Fichtescher Philosoph: Ich bin ich, bespiegelt sich der Mensch zuerst in einem andern Menschen. Erst durch die Beziehung auf den Menschen Paul als seinesgleichen, bezieht sich der Mensch Peter auf sich selbst als Mensch. Damit gilt ihm aber

Anwendung auf das Studium der Proportionen zu bestimmten individuellen Verhältnissen begnügte. Dies hing bei ihr aber mit ihrer Bestimmung der Existenz durch Konstruktion zusammen. Über die eudoxische Theorie der Irrationalzahlen kann der Leser mehr erfahren aus einem Artikel von H. Hasse und H. Scholz: Die Grundlagenkrisis in der griechischen Mathematik. In: Kantstudien, Bd. XXXIII, 1928, der jedoch einige strittige Thesen enthält. Ich hoffe, dass ich die Möglichkeit haben werde, auf diesen Komplex von Fragen, die mit der sogenannten Methode der Exhaustion zusammenhängen, eigens einzugehen.

auch der Paul mit Haut und Haaren, in seiner paulinischen Leiblichkeit, als Erscheinungsform des genus Mensch.“[31]

Wir sehen somit, dass der Mensch den Begriff des Menschen erst durch den Vergleich seiner selbst mit anderen Menschen, durch das Verhältnis der Ähnlichkeit zwischen den Menschen bildet.

3. Der Standpunkt Weyls

Gegen diese „Abstraktionsdefinitionen“ und insbesondere gegen deren Behandlung, die wir angeführt haben, wird eine ganze Reihe von Einwänden vorgebracht.

Die einen, wie beispielsweise der Idealist Weyl, weisen die Bedeutung dieser „Definitionen“ in der Mathematik nicht zurück – ganz im Gegenteil: sie schätzen sie sehr hoch. Aber sie versuchen, sie idealistisch auszulegen. Mehr als das, ihre Hochschätzung hängt in beträchtlichem Maße gerade mit jener idealistischen Auslegung, die sie diesen „Definitionen“ zu verleihen suchen, zusammen. Dabei reizt den Idealisten, dass bei diesen „Definitionen“ das *Verhältnis* dem definierten *Gegenstand* gleichsam vorangeht: Die Gleichzahligkeit geht der Zahl voran, die Proportion, d. i. die Verhältnisgleichheit, dem Verhältnis, der Tausch dem Wert. Um einerseits alle mit dem Gebrauch dieser „Definitionen“ verbundenen Vorzüge zu bewahren und andererseits die Theorie der Abstraktion ihres materialistischen Gehalts zu berauben (Sowohl die idealistische Unschuld bewahren als auch das Kapital gewinnen!), muss man erklären, dass durch diese „Definitionen“ *nicht* eine gemeinsame Eigenschaft der einander gleichgesetzten Gegenstände, die schon existiert – und zudem unabhängig von dem Vergleich der Gegenstände miteinander existiert –, *abgesondert* wird, *sondern* ein gewisses neues „ideales Objekt“ *erzeugt* wird (nicht ohne Grund bezeichnet Weyl die Abstraktionsdefinitionen als schöpferische Definitionen[32]).

Wenn Marx zu dem Zweck, den „Wert“ in reiner Gestalt als gemeinsame Eigenschaft aller Waren abzusondern, vom Warentausch ausgeht, in dem ihr Wert *in Erscheinung tritt*, dann nimmt der Idealist an, dass der Tausch den Wert nicht nur absondert, sondern auch *erzeugt*. Wenn man zu dem Zweck, die Zahl zu „definieren“ mit der Definition der Gleichzahligkeit beginnen muss, zu dem Zweck, die Figur zu „definieren“, mit der Definition der Ähnlichkeit, und zu dem Zweck, die Richtung zu „definieren“, mit der Definition

[31] Anm. d. Ü.: Vgl. Marx: Das Kapital. Erster Band, a. a. O., S. 83, Anm. 18.
[32] Anm. d. Ü.: Hermann Weyl: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, 3. Aufl., München 1966, S. 22.

der Parallelität, dann zieht der Idealist Weyl hieraus den Schluss, dass mit Hilfe dieser Verhältnisse die Eigenschaften nicht nur abgesondert, sondern auch hervorgebracht werden, dass neue „ideale Objekte" erzeugt werden.

4. Die Einwände von Dubislav

Andere, wie zum Beispiel der Machianer Dubislav, für den die Mathematik bloß eine „gegenstandslose" Wissenschaft ist, bestreiten überhaupt die Rechtmäßigkeit dieser Definitionen ihres metaphysischen (lies: im Grunde genommen materialistischen) Charakters halber. Es ist bekannt, dass die Machianer mit dem Materialismus „fertig zu werden" hoffen, indem sie ihn „metaphysisch" schimpfen.

Um die Ungereimtheit des Anspruchs des Idealismus auf die „Abstraktionsdefinitionen" aufzuzeigen, um ihren wirklichen Sinn zu klären, den echt dialektisch-materialistischen Charakter dieser Methode der Begriffsbildung aufzuzeigen, ist es notwendig, ein wenig ausführlicher auf die Voraussetzungen einzugehen, die dieser Methode zugrunde liegen.

Wir beginnen mit den Einwänden, die Dubislav anführt.

„[Die] Anhänger der Definitionen durch Abstraktion" – sagt Dubislav – „[gehen] folgendermaßen zu Werke, wenn sie ein neues Symbol durch eine Definition einführen:

Entgegen der *Occam*schen Regel ‚entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem'[33] nehmen sie an, daß zwei Gegenstände eine gemeinsame Beschaffenheit in Gestalt eines neuen idealen Etwas besitzen, wenn zwischen den betreffenden Gegenständen eine transitive und symmetrische Relation besteht. Diese Annahme wird durch die Feststellung zu stützen gesucht, daß der Besitz einer gemeinsamen Beschaffenheit zweier Gegenstände das Bestehen einer transitiven und symmetrischen Relation zwischen ihnen gemeinhin zur Folge hat. Um also gegebenenfalls ein ideales Etwas in bezug auf ein System von Voraussetzungen einer Disziplin als die Bedeutung eines neu einzuführenden Symbols zu erzeugen bzw. aufzuweisen, genügt es, so meint man, zu zeigen, dass zwischen zwei Gegenständen aus dem Bereich der betreffenden Disziplin eine transitive und symmetrische Relation besteht.

Die diese transitive und symmetrische Relation im übertragenen Sinne des Wortes zur Folge habende gemeinsame Beschaffenheit, deren Existenz dann feststehe und die auch hinreichend von anderen Beschaffenheiten abgegrenzt sei, sei damit einwandfrei erzeugt bzw. aufgewiesen. Man könne infolgedes-

[33] Man darf die Seienden nicht ohne Notwendigkeit vermehren.

sen diese Beschaffenheit willkürlich als die Bedeutung des neu einzuführenden Symbols hinstellen.“[34]

„Wie sieht es nun aber mit den Rechtfertigungen aus, die die Anhänger der Definitionen durch Abstraktion in der Tat zu geben pflegen? Die ganze Begründung läuft darauf hinaus, den Aufbau einer ganzen Disziplin mit einem quasi metaphysischen Axiom bzw. Vorurteile zu belasten entgegen {der auch von Hilbert vertretenen} heuristischen Maxime, den Aufbau einer exakten Wissenschaft ohne Annahmen über die Existenz oder die Erzeugung im platonischen Sinne idealer Gegenstände zu gestalten“[35] – Annahmen, die er sodann als „unbegründet und letztendlich sogar widerlegt“ bezeichnet.

Das Kunststück, das darin besteht, dem Materialismus platonische „Ideen“ unterzuschieben und ihn mit einem Idealismus kantianischer oder platonischer Richtung zu vermengen, ist nicht neu: Mit seiner Hilfe versuchen alle Machianer den Materialismus zu „widerlegen“. Seine geniale Entlarvung findet sich in Lenins „Materialismus und Empiriokritizismus“. Ebenfalls nicht neu ist die Beschuldigung der Materialisten der ungesetzlichen Verdrehung gewisser Theoreme.

Es lohnt sich jedoch, sich mit Dubislavs Einwänden in dem gegebenen besonderen Fall gründlich zu beschäftigen. Das gibt uns die Möglichkeit, nicht nur noch einmal das echte Wesen der Verfahren, die vom Machismus angewandt werden, offenzulegen, sondern auch unseren eigenen Standpunkt über die „Abstraktionsdefinitionen“ präziser zum Ausdruck zu bringen. Der Kern des von Dubislav angewandten Vorgehens besteht im Folgenden:

1) Er vermengt die idealistische Einstellung zu den „Abstraktionsdefinitionen“ als „schöpferische“, gewisse „ideale Objekte“ „schaffende“, mit der materialistischen Ansicht über diese „Definition“ als bloß einer Methode des Absonderns (Abstrahierens) einer bereits von uns unabhängig existierenden Eigenschaft, indem er über die Anhänger der Abstraktionsdefinitionen *schlechthin*, aber nicht über ihre materialistischen und idealistischen Anhänger urteilt.

2) Diese „schlechthinnigen Anhänger“ der Abstraktionsdefinitionen bezichtigt er ferner, ungesetzlich gewisse wahre Theoreme ins Gegenteil zu verkehren. Wenn einige Gegenstände gemeinsame Eigenschaften besitzen, beispielsweise sie alle grün sind, dann kann man zwischen diesen Gegenständen ein gewisses Verhältnis vom Typ einer Gleichheit oder Ähnlichkeit feststellen: Sie haben nämlich alle *die gleiche Farbe*, d. h. es besteht zwischen ihnen ein gewisses transitives und symmetrisches Verhältnis. Hieraus – sagt

[34] W. Dubislav: Die Definition, Leipzig 1931, S. 45f.
[35] A.a.O., S. 50. – Anm. d. Ü.: {der auch von Hilbert vertretenen} von S. J. ausgelassen.

Dubislav – schlussfolgern die „Anhänger“ der „Abstraktionsdefinitionen“, dass *auch umgekehrt* gilt: Wenn in einem Gegenstandsbereich ein transitives und symmetrisches Verhältnis statthat, dann existiert eine allen in diesem Verhältnis stehenden Gegenständen gemeinsame Eigenschaft. Ein einfachster logischer Fehler, der, nach Dubislav, auch Marx anzulasten ist, schließt er doch von dem Faktum des Warentausches auf die Existenz von etwas, das ihnen gemeinsam ist – der Wert.

3) Für den Fall schließlich, dass der „Anhänger“ dieser „Definitionen“ versuchen sollte, sich aus der Lage herauszuwinden, indem er erklärt, dass für ihn die Existenz der gemeinsamen Eigenschaft bei den in irgendeiner Hinsicht gleichen Gegenständen keineswegs eines Beweises des Theorems bedarf, sondern ein neues, von diesem wahren Satz unabhängiges Axiom darstellt, hat sich Dubislav … den Metaphysikvorwurf aufgespart. Ein solches Axiom ohne Beweis einzuführen! Das ist doch Metaphysik reinsten Wassers! Platonischer Tradition noch dazu!

Wir zeigen jedoch, dass Dubislavs Einwände tatsächlich nur die idealistische Verwendung der „Abstraktionsdefinitionen“ betreffen, hinsichtlich welcher sie in hohem Maße begründet sind.[36] Für ihren materialistischen Gebrauch haben sie nicht die geringste Relevanz.

5. Das System von Postulaten, die den „Abstraktionsdefinitionen“ zugrunde liegen

Damit dies klar wird, kommen wir wie versprochen zu dem System von Postulaten oder Prämissen, die den „Abstraktionsdefinitionen“ zugrunde liegen.

a) Der Zusammenhang der Reflexivität mit der Symmetrie und Transitivität

Es versteht sich, erstens, dass die Forderungen der Symmetrie und Transitivität für das Verhältnis, das der „Abstraktionsdefinition“ zugrunde liegt, allein nicht hinreichend sind. Jegliche Gleichheit ist nicht nur symmetrisch und transitiv, sondern auch reflexiv, d. h. jedes Ding ist sich selbst „gleich“. Manchmal begeht man den Fehler, die Reflexivität der Gleichheit einzig und allein aus ihrer Symmetrie und Transitivität zu „folgern“ (ohne die ergänzende Forderung nach der Nichtleere des Gebietes).

Dabei geht man für gewöhnlich folgendermaßen vor: aus der Transitivität folgt, dass, wenn der Gegenstand a im Verhältnis R zum Gegenstand b steht, der Gegenstand b seinerseits im Verhältnis R zum Gegenstand a, dann der

[36] Dubislavs eigene Versuche, überhaupt ohne „Abstraktionsdefinitionen“ auszukommen, sind durch und durch idealistisch.

Gegenstand *a* auch im Verhältnis *R* zum Gegenstand *a* stehen muss, d. h. zu sich selbst. So wie kraft der Symmetrie des Verhältnisses *R* die Prämisse dieses bedingten Satzes erfüllt ist, ist dann folglich auch der Schluss erfüllt, d. h. der Gegenstand *a* steht wirklich im Verhältnis *R* zu sich selbst, oder das Verhältnis *R* ist reflexiv.

Allein, man muss diese Erwägung in der Sprache der mathematischen Logik aufschreiben, damit der in ihr enthaltene Fehler deutlich sichtbar hervortritt.

In der Tat wird die Forderung der Symmetrie so aufgeschrieben:

$$xRy \rightarrow yRx \tag{1}$$

(„→“ ist das Zeichen für „Folgerung“ oder anders: „wenn ..., dann ...“).
Die Forderung der Transitivität jedoch schreibt sich so:

$$(xRy \;\&\; yRz) \rightarrow xRz \tag{2}$$

(& als Zeichen für „und“)

Setzt man in der zweiten Formel *x* anstelle von *z*, erhalten wir

$$(xRy \;\&\; yRx) \rightarrow xRx \tag{2*}$$

und um hieraus die Formel

$$xRx, \tag{3}$$

die die Reflexivität ausdrückt, zu erhalten, müssen wir die Formel

$$xRy \;\&\; yRx \tag{4}$$

bewiesen haben.

(In diesem Fall können wir die logisch gültige Folgerung ausnutzen, im Einklang mit welcher aus den zwei Formeln (1) *S* und (2) *S* → *T* die neue Formel *T* gefolgert wird.[37])

Allein, die Formel (4) fällt keineswegs mit der Formel (1) zusammen, wie wir dies in unserer „Erwägung“ angenommen haben.

Auch der Ersatz der Formel (2) durch die Formel

$$(xRy \rightarrow yRz) \rightarrow xRz \tag{5}$$

[37] Anm. d. Ü.: Vgl. z. B. David Hilbert: Neubegründung der Mathematik (1922). In: Gesammelte Abhandlungen, Bd. 3, Berlin 1970, S. 168f., hier als „Schlußschema“ bezeichnet.

bietet keinen Ausweg aus dieser Schwierigkeit, weil die Formeln (2) und (5) ungleichwertig sind und man folglich das Gesetz der Transitivität nicht durch die Formel (5) ausdrücken darf. (Die Ungleichwertigkeit dieser Formel ist übrigens schon an einfachsten Beispielen erkennbar: In der Tat ist der Satz „Wenn Nebel und Schneesturm herrschen, kann der Pilot nicht abfliegen." offensichtlich dem Satz „Wenn daraus, dass Nebel herrscht, folgt, dass ein Schneesturm wütet, dann kann der Pilot nicht abfliegen." ungleichwertig. Denn der erste setzt den Nichtabflug des Piloten in Abhängigkeit von Nebel und Schneesturm, der zweite aber bloß in Abhängigkeit von dem Zusammenhang zwischen Nebel und Schneesturm, ohne das faktische Vorhandensein weder des Nebels noch des Schneesturms vorauszusetzen.)

b) Die Forderung der Nichtleere des „Feldes" des Verhältnisses

Weyl vermeidet diesen Fehler, indem er einfach die Reflexivität unter die Forderungen reiht, deren Erfüllung für die Legitimität der „Abstraktionsdefinition" notwendig ist. Dubislav schließt – zusammen mit der Mehrheit der Mathematiker – den Forderungen der Symmetrie und Transitivität die Forderung an, dass das „Feld" des betrachteten Verhältnisses R nicht leer ist, d. h. dass wirklich Gegenstände *existieren*, die im Verhältnis R zueinander stehen.
In diesem Fall kann die Reflexivität auf folgende Weise gezeigt werden. Wir haben einen beliebigen Gegenstand a, der zum Feld des Verhältnisses R gehört, d. h. für den ein zu ihm im Verhältnis R stehender Gegenstand b *existiert*. Dann haben wir:

$$aRb. \tag{6}$$

Indem wir in der Formel (1) $x = a$ und $y = b$ setzen, erhalten wir

$$aRb \rightarrow bRa \tag{1*}$$

und nach der Folgerungsregel gibt uns das

$$bRa \tag{7}$$

Das Bestehen der Formeln (6) und (7) gibt uns die Möglichkeit, die Formel

$$aRb \,\&\, bRa \tag{8}$$

aufzustellen, aber letztere führt in Verbindung mit der Formel

$$aRb \,\&\, bRa \rightarrow aRb \tag{2**}$$

die wir aus Formel (2) durch die Aufstellung $x = a$, $y = b$ und $z = a$ erhalten haben, auf die von uns benötigte Formel aRa. Da diese Erwägung auf beliebige Gegenstände angewendet werden kann, ist die Reflexivität dieses Verhältnisses damit wirklich bewiesen.

Die zweite Methode (d. h. die Forderung der Nichtleere für das Feld des Verhältnisses R) ist zweifelsohne besser als die erste, denn sie entspricht eher der faktischen Lage der Dinge. Tatsächlich hat das Verhältnis nur dann einen Sinn, wenn es in diesem Verhältnis stehende Dinge *gibt*. Außerdem ist ein Ding keineswegs von Anfang an sich selbst in beliebiger Hinsicht „gleich“, d. h. die Reflexivität ist keine Eigenschaft der Gleichheit in einer Reihe mit ihrer Symmetrie und Transitivität. Rufen wir uns das schon angeführte Wort Marxens ins Gedächtnis, dass der Mensch weder mit einem Spiegel in den Händen noch als Fichtescher Philosoph geboren wird: „Ich bin ich“ – sondern erst durch die Beziehung zu anderen Menschen als seinesgleichen zu sich selbst als Mensch in Beziehung tritt. Auch in der Logik, die die wirkliche Lage der Dinge widerspiegelt, ist es daher vollkommen natürlich, die Reflexivität aus der Symmetrie und der Transitivität zu folgern, und sie nicht einfach als besondere ergänzende Forderung anzuschließen. Aber, versteht sich, nur korrekt zu folgern (d. h. nur unter Voraussetzung der Nichtleere des Gebietes).

c) Ausschluss der Identität

Allein auch die Ergänzung, die Dubislav (oder Weyl) vornimmt, ist noch nicht hinreichend für die echte Möglichkeit, etwas „durch Abstraktion zu definieren“. Tatsächlich kann man allen von Weyl oder Dubislav angeführten Forderungen mit Hilfe eines Verhältnisses xRy genügen, welches, obgleich es auch die Eigenschaften der Symmetrie, Transitivität und Reflexivität besitzt, *nur in dem Fall* $x = y = a$ zustande kommt. Ein solches Verhältnis existiert wirklich: Es ist das Verhältnis der *völligen Identität*. Allein, es versteht sich, dass man mit Hilfe *dieses* Verhältnisses von keiner Eigenschaft des Gegenstandes ablenken darf, keine einzige von seinen Eigenschaften von den anderen abtrennen und in reiner Gestalt absondern darf und nichts anderes erhalten darf als die reine Tautolgie: „*A* ist *A*“, „Die Rose ist eine Rose“, „die Gerade ist eine Gerade“ etc. Kein einziger dieser Sätze enthält in Wirklichkeit irgendeinen Vergleich und kann daher der „Abstraktionsdefinition“ zugrunde gelegt werden. Zugrunde liegen muss der Abstraktionsdefinition nämlich ein Verhältnis der „Gleichheit“, aber nicht der „Identität“. Eine „Gleichheit“ kann daher nur durch einen Unterschied definiert werden, kann nur eine *Gleichheit* *voneinander unterschiedener* Dinge sein. Das bedeutet aber, dass man sich nicht mit der bloßen Forderung der Nichtleere für das Gebiet des Verhältnisses *R* begnügen darf, sondern außerdem fordern muss, dass dieses Feld mindestens zwei *verschiedene* Gegenstände enthält oder – wenn man nicht den Begriff „zwei" gebrauchen möchte, eingedenk dessen, dass die Zahl selbst „durch Abstraktion definiert" wird – dass das Feld des Verhältnisses *R* voneinander verschiedene Dinge enthalte, die nur in diesem Verhältnis *R* einander „gleich" sind.

d) Der Vergleich darf die zu vergleichenden Dinge nicht verändern

Allein, es ist leicht zu zeigen, dass auch dies noch nicht hinreichend ist. Stellen wir uns vor, dass wir die Soldaten zweier Regimenter in der Absicht, festzustellen, ob diese Regimenter einander gleichmächtig sind, miteinander in Übereinstimmung bringen würden, die Soldaten aber auf den Einfall kämen, zu dieser Zeit von einem Regiment in das andere überzulaufen (ein Beispiel von H. Poincaré),[38] oder nehmen wir an, dass die Waage, mit der gewogen wird, so beschaffen wäre, dass ein Stück Zucker, sobald es mit ihr nur in Berührung kommt, sich in seine chemischen Bestandteile zu zersetzen beginnt, – kurzum, dass im Prozess des Vergleichs eine Veränderung der miteinander zu vergleichenden Dinge geschieht. Es ist klar, dass wir in einem solchen Fall nichts „durch Abstraktion definieren" könnten. Denn es gäbe gerade die Eigenschaft, die wir absondern wollen, nicht: sie würde sich im Prozess des Vergleichs verändern. Der Vergleichsprozess muss daher so organisiert werden, dass *sich unter seinem Einfluss die zu vergleichenden Gegenstände*[39]

[38] Den Statistikern ist wohl bekannt, wie schwierig eine korrekte Volkszählung (d.h. die wechselseitige Übereinstimmung zwischen der Menge der Menschen, die gewisse Landstriche besiedeln, und der Menge der Kontrollkärtchen festzustellen) durchzuführen ist, wenn sich im Verlauf der Zählung ein Teil der Bevölkerung bewegt.

[39] Für sich selbst genommen, d. h. gerade als Gegenstände und nicht als Momente des gegebenen Verhältnisses R. Um diesen Unterschied zu klären, merken wir an, dass ein und derselbe Gegenstand sich in verschiedenen Beziehungen zu einem unterschiedlichen anderen Gegenstand des betrachteten Gebietes befinden kann, der indessen als Moment des Verhältnisses keinen Sinn unabhängig von eben diesem Verhältnis (und seinen übrigen Momenten) hat. So besteht der „Zähler" nicht unabhängig vom „Nenner" und vom „Bruch", d. h. vom Verhältnis zwischen Zähler und Nenner. Und ebenso existiert die „negative Zahl" nicht ohne die „positive", der „Norden" – nicht ohne „Süden", die „rechte Seite" – nicht ohne die „linke". Das bedeutet jedoch auch, dass „Zähler", „Nenner", „Norden", „Süden" an und für sich nicht Gegenstände, sondern nur Momente der Verhältnisse zwischen Gegenständen sind.

Hieraus wird übrigens ersichtlich, wie unsinnig die Versuche des Idealismus sind, die modernen Lehren über die Zahl gerade als Bestätigung seines Standpunkts, als den *nicht verändern*. In der Praxis ist dies natürlich nicht immer möglich, genauer: möglich ist es nur in einer gewissen Annäherung, deren Genauigkeit wir

---

Gegenstand (die Substanz) in das Verhältnis (die Funktion) auflösend, vorzuweisen. Indem er die Äußerung Dedekinds anführt, mit welcher letzterer seine Deduktion des Zahlbegriffs beginnt und bei welcher von „der Fähigkeit des Geistes, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Ding ein Ding entsprechen zu lassen“ die Rede ist, schreibt Cassirer („Substanzbegriff und Funktionsbegriff“ [Titel der russ. Ausgabe: „Poznanie i dejstvitel’nost’ (Erkenntnis und Wirklichkeit)“, Werke, Bd. 6, Hamburg 2000, S. 36]): „Hier scheint ganz im Sinne der traditionellen logischen Doktrin von einer Mehrheit von Dingen und von dem Vermögen des Geistes, sie abzubilden, ausgegangen zu werden; aber dennoch zeigt es sich bei tieferem Eindringen sogleich, daß die überlieferten Bezeichnungen {hier} [bei Cassirer: selbst – d. Ü.] einen neuen Gehalt und eine neue Bedeutung gewonnen haben. Die ‚Dinge‘, von denen in der weiteren Ableitung die Rede ist, werden nicht als selbständige Existenzen vor jeder Beziehung als vorhanden gesetzt, sondern sie erhalten ihren gesamten Bestand, soweit er für den Arithmetiker in Betracht kommt, erst in und mit den Beziehungen, die von ihnen ausgesagt werden. Sie sind Relationsterme, die niemals abgelöst, sondern nur in idealer Gemeinschaft miteinander ‚gegeben‘ sein können.“

Die Dinge, die „vor jeder Beziehung existieren“, existieren überhaupt nicht. Denn die Dinge existieren in Zusammenhängen, in Verhältnissen mit anderen Dingen. Die Dinge sind im Wesen jedoch nicht nur Momente eines Verhältnisses, seine „Relationsterme“. Ein und dieselben Dinge können in verschiedenen Verhältnissen figurieren, und in diesem Sinn existieren die Verhältnisse, haben relativ zu ihnen eine selbständige Existenz. Das Verhältnis R, in welchem ihr Vergleich geschieht, muss gerade von letzterer Art sein. Für die Bildung des Zahlbegriffs mit Hilfe der Abbildung ist Dedekind daher der Gegenstand, nicht aber das Moment des Verhältnisses unabdingbar. Und Cassirer hat daher unrecht, wenn er versichert, dass sich, wenn Dedekind über Mengen von Dingen und ihre Abbildung aufeinander spricht, dann „bei tieferem Eindringen sogleich [zeigt], daß die überlieferten Bezeichnungen (es wird auf „Ding“ und „Abbildung“ angespielt, S. J.) hier einen neuen Gehalt und eine neue Bedeutung gewonnen haben“: die „Dinge“ seien keine Dinge, sondern bloß „Relationsterme“ u. s. w. Nein, gerade „hier“ haben und konnten sie nicht irgendeinen neuen Gehalt oder eine neue Bedeutung erhalten, sogar ungeachtet dessen, dass Dedekind selbst auch ein Idealist ist und dass seine Konstruktion der Theorie der ganzen Zahl sich von der Konstruktion Cantors und Freges durch ihren im wesentlichen axiomatischen Charakter unterscheidet.

Mehr als das, sogar jene wirklich existierenden Seiten und Momente der Dinge, welche in den abstrakten Begriffen widergespiegelt werden, können selbst in einem gewissen Sinne als die Cassirer verhassten „Dinge“ auftreten, die „abgelöst gegeben“ sein können (und nicht bloß als Momente eines Verhältnisses): Wenn die Rede von Abstraktionen höherer Ordnung ist, müssen die Abstraktionen niederer Ordnung eine von jenem Verhältnis R, in welchem ihr Vergleich geschieht, unabhängige Existenz haben und nicht bloß „Relationsterme“ sein.

Mit dem mit der letzten Frage zusammenhängenden „Umschlag in der Methode“ [im Original deutsch – d. Ü.], von dem Marx in seinen mathematischen Manuskripten spricht [Vgl. Marx, Über das Differential und Über das Differential. Erster Entwurf, a. a. O., S. 64f und 86 – d. Ü.] (und der, wie wir gesehen haben, in bezug auf den Zahlbegriff statthat), müsste man sich gesondert beschäftigen.

jedoch zu steigern vermögen. So kommt es im Prozess des Wiegens oder des Tausches zu einem gewissen Verlust an Gewicht oder Ware, wir sind aber daran interessiert, dass er von *geringster* Bedeutung ist, dass er dermaßen bedeutungslos ist, dass wir das Recht haben, von ihm zu abstrahieren, ihn nicht zu berücksichtigen. Die „Abstraktionsdefinition" setzt so ein gewisses Moment der *Abstraktion* oder *Idealisierung* im gewöhnlichen Sinne des Wortes voraus, im Sinne einer Vergröberung, von welcher Lenin als einem notwendigen Merkmal aller Abstraktion spricht, das jedoch im Prozess der Erkenntnis – auf dem Weg durch die relative Wahrheit zur Absoluten – aufgehoben wird.[40] Indem wir nach adäquater Widerspiegelung der Wirklichkeit streben, geben wir uns nicht mit der Konstatierung der Unvermeidlichkeit einer gewissen Ungenauigkeit zufrieden, sondern trachten nach vollkommenerer (näherer und idealerer) Einrichtung des „Vergleichs"-Prozesses. Wir kämpfen unerbittlich gegen den „Decalo" und den „Verlust" (der Klassenfeind ist am Betrug des proletarischen Staates und des Konsumenten interessiert), wir bemühen uns, die *Volkszählung* an verschiedenen Plätzen gleichzeitig und dabei in allerkürzester Frist auszuführen u. s. w. Mit anderen Worten, wir streben nach einer solchen Organisation des „Vergleichs"-Prozesses, bei der die gleichzusetzenden Dinge im Prozess ihres Vergleichs nicht verändert werden.

Folglich muss das Verhältnis R die Eigenschaft besitzen, die Dinge nicht zu verändern, wenn diese es eingehen. Es muss diesen Gegenständen *in einem gewissen Sinne* „äußerlich", ihnen „gleichgültig" sein.[41] Aber in einem solchen Fall ist klar, dass man mit seiner Hilfe nicht irgendeine neue Eigenschaft dieser Dinge „schaffen" darf, sondern nur eine schon existierende *absondern* kann. Mit anderen Worten, die *Eigenschaft xRa*, *die durch das Verhältnis xRy definiert wird, muss einer gewissen „einfachen" Eigenschaft, die unabhängig von dem Verhältnis R besteht, äquivalent sein.* Andernfalls erlangte ein Gegenstand, der die Eigenschaft *xRa* besitzt, diese neue Eigenschaft erst dadurch, dass er zu einem anderen Gegenstand in das Verhältnis gebracht wird, d. h. er veränderte sich im Prozess des Vergleiches. Aber *derartige* Prozesse (und die ihnen entsprechende Verhältnisse R) *müssen wir* – wie gerade deut-

[40] Anm. d. Ü.: „Jedes Allgemeine umfaßt nur annähernd alle einzelnen Gegenstände. Jedes Einzelne geht unvollständig in das Allgemeine ein usw. usw." Lenin: Zur Frage der Dialektik. In: Werke, Bd. 38, S. 340; vgl. ebenda, S. 172, 185 u. 352f, siehe auch ders.: Die neueste Revolution in der Naturwissenschaft und der philosophische Idealismus. In: Bd. 14, S. 261.

[41] Gerade nur im Sinne der Forderung, die Eigenschaften der in dieses Verhältnis tretenden Dinge nicht zu verändern. In allem Übrigen muss die Herstellung dieses Verhältnisses unbedingt durch das Wesen der Sache und nicht durch das Vorhandensein einer äußerlichen Ähnlichkeit zwischen den Dingen bedingt sein.

lich geworden ist – *ausschließen*, wenn die Rede von „Abstraktionsdefinitionen“ ist.

Unsere Forderung, dass sich die Gegenstände nicht verändern, wenn sie zueinander in das Verhältnis *R* gesetzt werden, ist auf diese Weise einem gewissen „Postulat der Reduzibilität“[42] gleichwertig [das die Forderung zum Ausdruck bringt, dass die durch ein Verhältnis (eine Gleichheit) definierte Eigenschaft zu einer gewissen einfachen Eigenschaft, die unabhängig vom Prozess des Vergleichs besteht, äquivalent („reduzibel“) ist]. Eben dies hat auch Marx im Sinn, wenn er im Zusammenhang mit der Definition des Werts und des Gewichts bemerkt, dass „die Eigenschaften eines Dinges nicht aus seinem Verhältniß zu anderen Dingen entspringen, sich vielmehr in solchem Verhältniß nur bethätigen“.[43]

Nun können wir wieder zu Weyl und Dubislav zurückkommen, weil nun einerseits klar ist, dass mit Hilfe der „Abstraktionsdefinitionen“ nicht irgendwelche neuen „idealen Objekte“ „geschaffen“ werden, und andererseits deutlich ist, dass diese Definition weder auf einem illegitimen Umdrehen irgendwelcher Theoreme begründet ist, noch sich auf irgendein „metaphysisches“ Axiom stützt. Denn wenn es im Vergleichsprozess, *durch den die Eigenschaften der Dinge nicht verändert werden*, gelingt, irgendeine beliebige Eigenschaft zu entdecken, die alle in einem gewissen Verhältnis einander „ähnlichen“ Dinge besitzen, dann ist klar, dass wir es mit einer ihnen allen *gemeinsamen* Eigenschaft zu tun haben, die in den Gegenständen wirklich und unabhängig von einem solchen Verhältnis, in dem wir sie vergleichen, besteht. Sonst könnte das Verhältnis diesen nicht äußerlich sein, d. h. nicht bestehen, ohne die Eigenschaften der Dinge zu ändern, die in das Verhältnis getreten sind.

In diesem Fall bleibt aber kein Platz für irgendwelche Mystik und Metaphysik, die wirklich mit den „schöpferischen“ Definitionen Weyls zusammenhängen, und die Kritik Dubislavs verliert ihre Grundlage. Fürwahr, für

[42] Anm. d. Ü.: Marx: Das Kapital. Erster Band, a.a.O., S. 88. – « Postulat svodimosti » – ein Zusammenhang mit dem Janovskaja zweifellos bekannten Russellschen “axiom of reducibility” (siehe Mathematical logic as based on the theory of types. In: American Journal of Mathematics, 30, 1908, S. 241 ff), das die Rückführbarkeit jeder Aussagefunktion auf eine prädikative Aussagefunktion behauptet, besteht jedoch nicht, da es hier nicht um die Ordnung des Ausdruckes xRa geht; vgl. hierzu Paul Bernays: Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie. In: Blätter für deutsche Philosophie, Bd. 4, 1930–1931, S. 326–367; S. 17–61.

[43] „Es mußte Dinge geben, die Gestalt hatten und deren Gestalten man verglich, bevor man auf den Begriff der Figur kommen konnte.“ (Engels) Hervorh. S. J. [Anti-Dühring, MEGA² I/27, S. 246].

den Idealisten ist selbst die von unserem Bewusstsein unabhängige Existenz der Dinge schon „Metaphysik". Aber gegen eine solche „Metaphysik" haben wir nichts. Denn dies ist keine Metaphysik, sondern Materialismus.

e) Nicht das formale, sondern das reale Allgemeine

Bei einer richtigen, materialistischen Deutung der „Abstraktionsdefinitionen" erweist sich der Vorwurf der illegitimen Umkehrung eines gewissen Theorems, wie bereits erwähnt, als grundlos. In Wirklichkeit können wir weiter behaupten: Selbst das berüchtigte „richtige Theorem" ist nicht vollkommen sicher. Denn aus dem Vorhandensein von etwas Gemeinsamem zwischen den Dingen folgt noch keineswegs das Recht, sie einander *gleichzusetzen*, sie unter einem gemeinsamen Begriff zu fassen, den man zu den wissenschaftlich begründeten zählen kann. Daraus, dass der Idealist wie der Materialist im Schutze der „Abstraktionsdefinition" auftreten können, folgt mithin nicht das wirkliche Recht, sie als „Anhänger" dieser Methode der Bildung wissenschaftlicher Begriffe einander gleichzusetzen. Denn im gegebenen Fall ist das *Wesentliche nicht die Ähnlichkeit*, der ein formaler, oberflächlicher Charakter eignet, sondern gerade der Unterschied zwischen ihnen. Der Versuch, die einen den anderen gleichzusetzen, verfolgt, wie schon bemerkt, bloß das Ziel, dem Materialismus einen Idealismus unterzuschieben. Ich wiederhole, das *formale* Vorhandensein eines gemeinsamen Merkmals bei verschiedenen Dingen gibt einem ohne eine konkrete, *inhaltliche* Analyse nicht das Recht, sie als gleich zu betrachten; genauer, es kann nicht als hinreichende Begründung für die Einführung eines neuen *wissenschaftlichen* Begriffs dienen. Der konsequente Neukantianer Cassirer ist in dieser Frage klüger als der wirre Machianer Dubislav, wenn er bemerkt: „Wenn wir – um ein drastisches Beispiel Lotzes zu gebrauchen – Kirschen und Fleisch unter die Merkmalsgruppe rötlicher, saftiger, eßbarer Körper unterordnen, so gelangen wir hiermit zu keinem gültigen logischen Begriff, sondern zu einer nichtssagenden Wortverbindung, die für die Erfassung der besonderen Fälle nichts bedeutet und leistet. Somit zeigt es sich, daß die allgemeine formale Vorschrift für sich allein nicht genügt, daß vielmehr überall zu ihrer Ergänzung stillschweigend auf ein anderes gedankliches Kriterium zurückgegriffen wird."[44] Man muss bloß anmerken, dass ein derart allgemeiner Begriff, der in einem konkreten Verhältnis bloß einen formalen Sinn besitzt, unter veränderten Bedingungen gehaltvoll werden kann.

[44] Anm. d. Ü.: Ernst Cassirer: Substanzbegriff und Funktionsbegriff. In: Werke, Bd. 6, Hamburg 2000, S. 5. Bei Cassirer „Kriterium" hervorgehoben.

So konnte die Gleichsetzung verschiedener konkreter Arten von Arbeit nach der Zeit, die zur Erzeugung eines gegebenen Gebrauchswerts erforderlich ist, die Bildung der Kategorie der abstrakten Arbeit, der Arbeit überhaupt, *formal* natürlich auch in der alten Sklavengesellschaft verwirklicht werden. Aber einen *realen* Sinn erlangte sie erst später, als sich eine solche Gesellschaftsform entwickelte, „worin die Individuen mit Leichtigkeit aus einer Arbeit in die andre übergehn und die bestimmte Art der Arbeit ihnen zufällig, daher gleichgültig ist. Hier wird die Abstraction der Categorie ‚Arbeit‘, ‚Arbeit überhaupt‘, Arbeit sans phrase, der Ausgangspunkt der modernen Oekonomie, erst praktisch wahr.“[45] Auf diese Weise sehen wir, inwiefern der Prozess der Bildung der *Abstraktion* einen *konkreten* Charakter haben muss, wie selbige Bildung gerade jener und nicht anderer abstrakter Begriffe von den konkreten historischen Verhältnissen abhängt, wie „selbst die abstractesten Categorien, trotz ihrer Gültigkeit – eben wegen ihrer Abstraction – für alle Epochen, doch in der Bestimmtheit dieser Abstraction selbst ebenso sehr das Product historischer Verhältnisse sind und ihre Vollgültigkeit nur für und innerhalb dieser Verhältnisse besitzen.“[46]

Um schließlich im Detail zu zeigen, was für eine große Rolle dabei die Praxis spielt, insbesondere eine am eigenen Leib erfahrene Alltagslektion, muss man an die Figur des König Lear erinnern, der zu dem Begriff des „Menschen überhaupt“ – und nicht nur dem des „Königs“ und des „Untertans“ – erst infolge von grausamen Prüfungen gelangt ist, die ihn auf eine Stufe mit dem letzten Bettler stellten.[47]

6. Die echte Definition der Objekte, die „durch Abstraktion definiert“ worden sind

Die Analyse der Voraussetzungen, deren Erfüllung als notwendige Bedingung der „Abstraktionsdefinition“ erscheint, haben wir abgeschlossen. Das Hauptergebnis, auf das wir gekommen sind, besteht dabei darin, dass mit Hilfe die-

---

[45] K. Marx: Zur Kritik der Politischen Ökonomie [MEGA² II/1.1, S. 39 – d. Ü.]. Im vorigen Absatz schreibt Marx: „Arbeit scheint eine ganz einfache Categorie. Auch die Vorstellung derselben in dieser Allgemeinheit – als Arbeit überhaupt – ist uralt. Dennoch, ökonomisch in dieser Einfachheit gefaßt ist „Arbeit“ eine ebenso moderne Categorie, wie die Verhältnisse, die diese einfache Abstraction erzeugen.“ [Ebenda, S. 38. – d. Ü.]

[46] K. Marx: Zur Kritik der Politischen Ökonomie [MEGA² II/1.1, S. 40 – d. Ü.].

[47] Anm. d. Ü.: “Is man no more than this? Consider him well. Thou // owest the worm no silk, the beast no hide, the sheep // no wool, the cat no perfume. Ha! here’s three on // ’s are sophisticated! Thou art the thing itself: // unaccommodated man is no more but such a poor bare, // forked animal as thou art.” William Shakespeare: King Lear, III. 4.

ser „Definitionen" nicht irgendein neues Objekt geschaffen wird, es im Grunde genommen nicht einmal definiert wird,[48] sondern lediglich eine schon bestehende gemeinsame Eigenschaft *abgesondert* wird. Dann aber ist klar, dass die „Abstraktionsdefinition" die Suche nach der echten Definition, die unmittelbar zeigt, worin das Wesen dieses Gemeinsamen besteht, das in den beiden verschiedenen, einander gleichzusetzenden Dingen enthalten ist, nicht ausschließt, sondern im weiteren voraussetzt.

„Nehmen wir" – schreibt Marx – „zwei Waaren, z. B. Weizen und Eisen. Welches immer ihr Austauschverhältniß ist, es ist stets darstellbar in einer Gleichung, worin ein gegebenes Quantum Weizen irgend einem Quantum Eisen gleichgesetzt wird, z. B. 1 Quarter Weizen = a Ctr. Eisen. Was besagt diese Gleichung? *Daß ein Gemeinsames* von derselben Größe *in zwei verschiedenen Dingen existiert*, in 1 Quarter Weizen und ebenfalls in a Ctr. Eisen".[49] Die Konsequenz, die Marx hieraus zieht, lautet:

„Beide sind also gleich einem Dritten, das an und für sich weder das eine noch das andere ist."

Aber Marx bleibt nicht bei dieser Konstatierung der Existenz von etwas Drittem, das den beiden einander gleichen Dingen gemeinsam ist, stehen. Er stellt die Frage: Worin besteht dieses Dritte? Und als Illustration, die die Legitimität dieser Fragestellung bestärkt, zieht er ein Beispiel aus der Mathematik heran.

„Ein einfaches geometrisches Beispiel veranschauliche dieß. Um den Flächeninhalt aller gradlinigen Figuren zu bestimmen und zu vergleichen, löst man sie in Dreiecke auf. Das Dreieck selbst reducirt man auf einen von seiner sichtbaren Figur ganz verschiedenen Ausdruck – das halbe Produkt seiner Grundlinie mit seiner Höhe. Ebenso sind die Tauschwerthe der Waaren zu reduciren auf ein Gemeinsames, wovon sie ein Mehr oder Minder darstellen."[50]

Als dieses Gemeinsame erweist sich am Ende der weiteren Analyse die Quantität der Arbeit oder die Quantität derjenigen Arbeitszeit, die zur Erzeugung eines gegebenen Gebrauchswerts gesellschaftlich notwendig ist.

Allein, die Aufgabe, dieses Gemeinsame, das die Dinge gleich macht, wirklich aufzuzeigen, zählt für gewöhnlich keineswegs zu den leichten. Fürwahr, es gibt Fälle, in denen dieses *Gemeinsame* zu bestimmen nicht schwer

[48] Darum haben wir das Wort „Definition" im Sinne der Abstraktionsdefinition immer in Anführungszeichen gesetzt.

[49] „Kapital". Anm. d. Ü.: Hervorh. S. J., bei S. J. „2 Ctr. Eisen" statt „a Ctr. Eisen". – Marx: Das Kapital. Erster Band, a. a. O., S. 69.

[50] Anm. d. Ü.: Ebenda.

ist, indem man das gegebene Gleichheitsverhältnis selbst analysiert. So ist die *Ähnlichkeit*, wie schon gezeigt, ein Verhältnis vom Typ der Gleichheit, aber *jenes* Gemeinsame, das beispielsweise bei allen einander ähnlichen Vielecken erhalten ist, ist die Größe ihrer Winkel und das Verhältnis ihrer Seiten. In der Zahlentheorie ist die *Gleichheit bis auf ein gegebenes Modul* ein Verhältnis vom Typ der Gleichheit, jenes Gemeinsame aber, das in allen einander *gleichen* Zahlen erhalten ist, ist der Rest bei Division durch die Zahl, die als Modul dient.

Dieses „Gemeinsame“ für das untersuchte Beispiel der Definition der Proportion durch Eudoxos aufzuzeigen, ist schon bedeutend schwerer. Befassen wir uns mit diesem Beispiel ein wenig ausführlicher und versuchen wir, jenes Gemeinsame, das für zwei proportionale Größen erhalten ist, *deutlich* zu charakterisieren. Aus der Definition des Eudoxos folgt, dass, wenn wir drei Kisten I, II und III aufstellen und in Abhängigkeit davon, welche von den drei Beziehungen 1) $mA > nB$, 2) $mA = nB$ oder 3) $mA < nB$ für ein gegebenes Zahlenpaar (m, n) statthat, dieses Paar entweder in die erste, die zweite oder die dritte Kiste würfen, sich dann – da jedes Paar in eine bestimmt Kiste gelangen müsste – die Gesamtheit aller möglichen Paare (m, n) (alle rationalen Zahlen oder Brüche m/n) als zerstückelt (eingeteilt) in drei Teile erwiese (die zweite Kiste kann höchstens ein Paar oder gar keines enthalten). Diese Zerstückelung oder dieser *Schnitt* der Gesamtheit der rationalen Zahlen wird jedoch nur für proportionale Größen *ein und derselbe* sein. In der Tat, wenn das Verhältnis $C : D$ nicht dem Verhältnis $A : B$ gleich ist, dann findet sich unbedingt ein solches Paar (m, n), für das $mC > nD$, aber $mA < nB$ (oder umgekehrt), d. h. welches für die Größen C, D in die erste (dritte) Kiste gelangen muss, während bei der Zerstückelung, die durch das Verhältnis $A : B$ erzeugt wird, eben dieses Paar (m, n) in der dritten (ersten) Kiste landet. Derart erzeugen alle einander gleichen Verhältnisse *ein und denselben Schnitt* des Gebietes der rationalen Zahlen in drei Klassen (insofern die mittlere kein einziges enthalten kann, reduzieren sich diese drei für gewöhnlich auf zwei), weswegen auch Dedekind *die reelle Zahl als Schnitt im Gebiet aller rationalen Zahlen definierte*. Mit dieser Definition hängen jedoch Schwierigkeiten zusammen, die dadurch bedingt sind, dass die rationalen Zahlen unendlich viele sind, wir aber so über sie urteilen, wie wir auch in dem Fall urteilten, wenn sie bloß eine endliche Zahl hätten. Den Alten waren die Paradoxa bekannt, die mit einer solchen Art von Gebrauch des Unendlichen zusammenhängen, und solange das Bedürfnis nach Mathematik noch recht klein war, zogen sie es vor (und konnten dies konsequent durchführen), überhaupt auf die Ermittlung

jenes Gemeinsamen, das der *Verhältnisgleichheit* – der Proportion – zugrunde liegt, zu verzichten und *bloß bei dieser Gleichheit zu verharren*. Die griechischen Schulen des Eudoxos und Euklids konnten deswegen auch nicht den Begriff der Fläche einführen, sondern mussten allein von der *Gleichheit von Flächen* sprechen (oder von ihrem Verhältnis, d. h. ihrer Proportionalität). Das bedeutet aber, dass sie nicht so vorgehen konnten, wie wir dies heute tun und wie Marx davon spricht, nämlich „das Dreieck ... auf einen von seiner sichtbaren Figur ganz verschiedenen Ausdruck – das halbe Produkt seiner Grundlinie mit seiner Höhe" zu reduzieren.
Als der Grieche Eudoxos das „Verhältnis" von Größen definieren musste, begann er richtig mit der Definition der „Verhältnisgleichheit" und ... blieb dabei stehen.

Nicht die Methode der „Abstraktionsdefinition" selbst, aber gerade dieses Anhalten bei dem Verhältnis, durch das die Dinge, die verglichen werden, gleichgesetzt werden, hat Leibniz im Blick, wenn er im fünften Brief an Clarke schreibt: „Im übrigen habe ich es hier ungefähr so gemacht wie Euklid: der, da er den Begriff des geometrischen Verhältnisses im absoluten Sinn nicht recht definieren konnte, bestimmte, was unter ‚gleichen Verhältnissen' zu verstehen ist."[51]

Fürwahr, Leibniz erkennt dabei an, dass der „Geist aber [...] mit dieser Übereinstimmung nicht zufrieden [ist]; er sucht eine Identität, ein Ding, das wahrhaft dasselbe wäre, und er stellt es sich wie außerhalb der Subjekte vor".[52] Aber Leibniz *stellt*, wie wir sehen, die „Abstraktionsdefinition" der echten Definition, deren Suche erst das Streben unseres Geistes nach Verwandlung der Gleichheit („Übereinstimmung") in eine Identität, der Eigenschaft in ein Ding, erklärt, *entgegen*. Im dialektischen Wechselverhältnis von Identität und Unterschied, Ding und Eigenschaft, Einzelnem und Allgemeinem, wirft er so eine der Seiten weg, indem er sie in den „Geist" verlegt. Das *Allgemeine* (die Eigenschaft oder das Verhältnis) besteht dabei für Leibniz nicht objektiv, sondern nur im Subjekt.

Es ist nicht verwunderlich, dass der Intuitionist Weyl, der auf dem Standpunkt der idealistischen Behandlung der „Abstraktionsdefinition" steht, gera-

51 Anm. d. Ü.: Zitiert nach Leibniz: Hauptschriften I (Edition Cassirer), Hamburg 1996, S. 136. Vgl. Weyl: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft …, S. 25 und A. Robinet: Correspondance Leibniz – Clarke, Paris 1957, S. 145: « J'ay fait icy à peu pres comme Euclide, qui ne pouvant pas faire entendre absolument ce que c'est que RAISON prise dans le sens des Geometres, definit bien ce que c'est que MEMES RAISON. »

52 Anm. d. Ü.: A. a. O., S. 134 f.; vgl. Robinet, a. a. O., S. 144: « Mais l'esprit non content de la convenance, cherche une identité, une chose qui soit veritablement la même, et la conçoit comme hors de ces sujets. »

de Leibniz für den Ahnherrn dieser Art von Definition hält. Es ist nicht verwunderlich, dass alle modernen machianischen, d. h. im Grunde idealistischen, Versuche, nachdem sie auf die „Abstraktionsdefinitionen“ verzichtet haben, die durch sie bereiteten Vorzüge,[53] die ebenfalls mit der Verwandlung dieses *Gemeinsamen*, durch das die *Gleichheit* von Dingen hervorgerufen wird, in eine *Fiktion*, ein „leeres Symbol“, zu bewahren, keinen unmittelbaren Sinn haben und bloß aus Erwägungen der Vereinfachung („Denkökonomie“) (Couturat, Russell)[54] eingeführt worden sind. Leider haben wir hier nicht die Möglichkeit, diese Versuche gründlich zu untersuchen. Es ist bloß *notwendig*, gerade die *faktische* Einheit hervorzuheben, die zwischen den idealistischen *Anhängern* der „Abstraktionsdefinition“ und ihren machianischen Gegnern besteht. Das *Gemeinsame* – nicht das Formale, sondern das Reale – besteht, wie sich herausstellt, nicht zwischen materialistischen und idealistischen „Anhängern“ der Abstraktionsdefinition, sondern zwischen Machisten und Idealisten, unabhängig davon, ob sie diese Definitionen „ablehnen“ oder „zulassen“!

Um auf die Frage nach dem wirklichen Aufweis dieses Gemeinsamen zurückzukommen, das im Grunde mit Hilfe der „Abstraktionsdefinition“ nicht definiert, sondern abgesondert (abstrahiert) wird (mit anderen Worten, die Frage nach der Entdeckung dieser „einfachen“ Eigenschaft, der die Eigenschaft, die durch Abstraktion definiert wird, äquivalent sein muss), muss man erwähnen, dass man unter der Voraussetzung einer ungenügenden konkreten Entwicklung auf dem Weg zur Lösung dieser Aufgabe auf sehr bedeutende Schwierigkeiten treffen kann, deren Überwindung – bei diesen konkreten Voraussetzungen – außerhalb der Möglichkeiten auch der fortschrittlichsten Leh-

[53] Von dem Charakter der „ungeheuren Komplikation“ (Dubislav) der Mathematik, die mit dem Verzicht auf diese Definition zusammenhängt, kann sich der Leser eine Vorstellung machen, indem er beispielsweise versucht, den Begriff der Fläche aus seinem wissenschaftlichen Wissensschatz zu verbannen und immer nur die Gleichheit oder Proportionalität von Flächen zu betrachten.

[54] Anm. d. Ü.: Durch die Abstraktionsdefinition (bzw. das Abstraktionsprinzip) wird die Gleichheit zwischen Dingen, die eine Größe haben (“quantities”), auf die Identität in ihrer Größe (der “magnitude”) zurückgeführt, womit sich die acht Axiome der „absoluten Theorie“, die die zwischen den “quantities” bestehenden Relationen =, < und > betreffen, auf die bloß noch fünf Axiome der „relativen Theorie“, die die zwischen den “magnitudes” bestehenden Relationen < und > betreffen, reduzieren. Vgl. B. Russell: The principles of mathematics, 2. Aufl., London 1903, § 156: “When this theory is applied in the enumeration of the necessary axioms, we find a very notable simplification. The axioms in which equality appears have all become demonstrable.” L. Couturat spricht von einer « notable économie de postulats ». Ders.: Les principes des mathématiques, Paris 1905, S. 101.

re der Epoche liegen kann. Ein Beispiel dieser Art, das erklärt, warum die Alten nicht zu dem Begriff des Wertes gelangen konnten, finden wir bei Marx.

„Das Genie des Aristoteles glänzt grade darin, daß er im Werthausdruck der Waaren ein Gleichheitsverhältniß entdeckt. Nur die historische Schranke der Gesellschaft, worin er lebte, verhindert ihn herauszufinden, worin denn ‚in Wahrheit' dies Gleichheitsverhältniß besteht."[55]

„[Er] sagt:

‚5 Polster = 1 Haus'

‚unterscheidet sich nicht' von:

‚5 Polster = soundso viel Geld'

Er sieht ferner ein, daß das Werthverhältniß, worin dieser Werthausdruck steckt, seinerseits bedingt, daß das Haus dem Polster qualitativ gleichgesetzt wird und daß diese sinnlich verschiednen Dinge ohne solche Wesensgleichheit nicht als kommensurable Größen aufeinander beziehbar wären. ‚Der Austausch', sagt er, ‚kann nicht sein ohne die Gleichheit, die Gleichheit aber nicht ohne die Kommensurabilität'."

(Erinnern wir uns, dass die Kommensurabilität, wie schon gezeigt, das Vorhandensein eines *gemeinsamen* Maßes bezeichnet. So zieht Aristoteles aus dem Vergleich der Gegenstände den Schluss auf das Vorhandensein von etwas Gemeinsamem bei ihnen, führt aber umgekehrt nicht das Gemeinsame auf die bloße Gleichheit zurück, wie dies der Idealist Leibniz tut, indem er auf der Grundlage dessen, dass das Gemeinsame kein Ding ist, die objektive Existenz dieses Gemeinsamen in den Dingen leugnet.)

„Hier aber stutzt er und gibt die weitere Analyse der Werthform auf. ‚Es ist aber in Wahrheit unmöglich, daß so verschiedenartige Dinge kommensurabel', d. h. qualitativ gleich seien. Diese Gleichsetzung kann nur etwas der wahren Natur der Dinge Fremdes sein, also nur ‚Nothbehelf für das praktische Bedürfnis'.

Aristoteles sagt uns also selbst, woran seine weitere Analyse scheitert, nämlich am Mangel des Werthbegriffs. Was ist das Gleiche, d. h. die gemeinschaftliche Substanz, die das Haus für den Polster im Werthausdruck des Polsters vorstellt? So etwas kann ‚in Wahrheit nicht existiren', sagt Aristoteles. Warum? Das Haus stellt dem Polster gegenüber ein Gleiches vor, soweit es das in Beiden, dem Polster und dem Haus, wirklich Gleiche vorstellt. Und das ist – menschliche Arbeit.

Daß aber in der Form der Warenwerthe alle Arbeiten als gleiche menschliche Arbeit und daher als gleichgeltend ausgedrückt sind, konnte Aristoteles

[55] Anm. d. Ü.: Marx: Das Kapital. Erster Band, a.a.O., S. 90.

nicht aus der Werthform selbst herauslesen, weil die griechische Gesellschaft auf der Sklavenarbeit beruhte, daher die Ungleichheit der Menschen und ihrer Arbeitskräfte zur Naturbasis hatte. Das Geheimnis des Werthausdrucks, die Gleichheit und gleiche Gültigkeit aller Arbeiten, weil und insofern sie menschliche Arbeit überhaupt sind, kann nur entziffert werden, sobald der Begriff der menschlichen Gleichheit bereits die Festigkeit eines Volksvorurtheils besitzt. Das ist aber erst möglich in einer Gesellschaft, worin die Waarenform die allgemeine Form des Arbeitsprodukts, also auch das Verhältniß der Menschen zueinander als Waarenbesitzer das herrschende gesellschaftliche Verhältniß ist.“[56]

So vergingen mehr als zweitausend Jahre von Aristoteles’ Entdeckung des Gleichheitsverhältnisses im Wertausdruck der Waren, von dem Moment der Feststellung irgendetwas Gemeinsamen bei ihnen (der Kommensurabilität) bis zur Entdeckung des wirklichen Wesens dieses Gemeinsamen – *von der Absonderung* des Gemeinsamen mit Hilfe der „Abstraktionsdefinition“ *bis zu seiner echten Definition*.

Hier ist es im übrigen notwendig zu erwähnen, dass wir, indem wir über die *echte* (d. h. von dem Verhältnis, in welchem der Vergleich der Dinge geschieht, unabhängige) Definition *jenes Gemeinsamen* sprechen, das die Dinge einander gleich macht, nicht unbedingt gerade das *Explizite*[57] seiner Definition im Blick haben. Für die grundlegendsten Begriffe der Wissenschaft ist letzteres nicht immer möglich. Da alles immer durch etwas anderes definiert wird, man in der Wissenschaft aber mit irgendwelchen Begriffen als *Ausgangs*begriffen *beginnen* muss. Diese Ausgangsbegriffe der Wissenschaft müssen in jedem Fall der Forderung unbedingt Genüge leisten, aus der realen, materiellen Welt abstrahiert zu sein, wobei der Weg, die Methode ihrer Bildung, klar sein muss. Letzterer erhellt auch mit Hilfe der „Abstraktionsdefinition“, ohne die eine legitime Bildung *gerade der Grund-, der Anfangs*begriffe der Wissenschaft augenscheinlich unmöglich ist. Eine vollständige – wenn vielleicht auch nicht immer klare – Definition dieser Begriffe gibt die weitere Entwicklung der Wissenschaft von selbst. Daraus, dass manch ein Begriff im *gegebenen wissenschaftlichen System* erst undeutlich definiert wird (wobei uns jedoch die Weise seiner Bildung bekannt ist, nämlich *wie und wovon* er abstrahiert worden ist), folgt keineswegs, dass für uns jenes Reale, als dessen Widerspiegelung der gegebene wissenschaftliche Begriff dient, unbekannt

[56] Anm. d. Ü.: Ebenda. S. 89 f.

[57] Als Muster der nicht-expliziten Definition kann beispielsweise die Definition einer Zahl mit Hilfe einer Gleichung, welcher sie genügen muss, dienen.

bleiben muss. Umgekehrt ist jeder wahre Satz, der mit Hilfe dieses Begriffs formuliert wird, eine Etappe auf dem Weg zur vollständigen Erkenntnis des durch diesen Begriff widergespiegelten Momentes der Wirklichkeit.

Vielleicht hat eben eine solche Situation hinsichtlich des von uns zu Beginn des Artikels betrachteten, augenscheinlich historisch wie logisch ersten Begriffs der Mathematik – des Begriffs der (Kardinal-)Zahl – statt.[58] Wir stellten fest, dass mit Hilfe dieses Begriffs jenes Gemeinsame ausgedrückt wird, das alle einander gleichmächtigen Mengen besitzen. Allein, worin besteht dieses Gemeinsame? Es ist klar, dass es nicht in den speziellen Eigenschaften der Elemente, die die Menge ausmachen, besteht, und nicht einmal in der Reihenfolge ihrer Anordnung. Manchmal sagt man, dass durch die *Zahl* die *Quantität* ausgedrückt wird. Das Wechselverhältnis des mathematischen Begriffs der Zahl mit der philosophischen Kategorie der Quantität wird dabei jedoch nicht näher untersucht.

Aber wenn es auch sehr schwierig ist, den Zahlbegriff auf etwas noch Einfacheres oder Allgemeineres zurückzuführen, so decken wir, indem wir ihn durch die Gleichzahligkeit definieren, zumindest die Verbindung dieses Grundbegriffs der Mathematik mit den real existierenden Mengen (Aggregaten) von Dingen auf. Manche Mathematiker meinen, dass das Auffinden dieser Verbindung für *mathematische Zwecke* überhaupt keine Rolle spielt, dass der Mathematiker nicht wissen muss, was solch eine Zahl ist und wie sie mit der Wirklichkeit zusammenhängt – man müsse bloß mit den Zahlen zu operieren verstehen – und dass man daher auch von der Entwicklung der Mathematik nicht erwarten dürfe, die Natur dieser gemeinsamen Eigenschaft gleichmächtiger Mengen, die sich in ihrer Zahl ausdrückt, besser zu klären. In Wirklichkeit ist dies nicht so. Tatsächlich ist es auch für die innermathematischen Zwecke unabdingbar zu wissen, was eine solche Kardinalzahl ist, wie sie nämlich mit der Menge zusammenhängt. Und die weitere Entwicklung der Mathematik wirft darauf ein neues Licht. So wird für *endliche* Mengen sofort das Faktum der Unabhängigkeit der Zahl von der Reihenfolge des Zählens festgestellt, dem Minkowski folgenden Ausdruck verlieh:

„Wenn wir in eine gewisse Anzahl von Schubladen eine größere Anzahl von Dingen legen wollen, dann befinden sich in wenigstens einer Schublade

[58] Vgl. auch die Anmerkung auf S. 115. Anscheinend haben wir es mit derselben Situation auch hinsichtlich des Begriffes der Größe zu tun. Die Mathematik – schreibt Engels – „definiert diese in lahmer Weise und fügt dann die andern Elementar-Bestimmtheiten der Größe, die in der Definition nicht enthalten, äußerlich als Axiome hinzu, wo sie dann als unbewiesen, und natürlich auch mathematisch unbeweisbar erscheinen." Anm. d. Ü.: Engels: Dialektik der Natur. In: MEGA² I/26, S. 14; MEW 20, S. 521.

zwei oder eine größere Zahl von Gegenständen.“ (Dirichlet’sches Schubfachprinzip)[59]

Auf diesem dem Anschein nach außerordentlich einfachen Prinzip basiert der Beweis vieler tiefer Theoreme der Zahlentheorie.

7. Der dialektische Charakter der betrachteten Weise der Begriffsbildung

In dem vorliegenden Artikel hatten wir nicht die Absicht, den gesamten Reichtum der Probleme, die mit den „Abstraktionsdefinitionen“ zusammenhängen, zu erschöpfen.

Vor uns stand die konkrete Aufgabe, durch den Vergleich der „Abstraktionsdefinition“ in der Mathematik mit der Methode der Konstruktion des Wertes und des Geldes im „Kapital“ aufzuzeigen, dass sich ungeachtet der Eigentümlichkeit des *Gegenstandes* der Mathematik, die Eigenart der mathematischen Erkenntnis, die Weise der Bildung der grundlegenden mathematischen Begriffe im wesentlichen nicht von der Weise ihrer Bildung in den anderen Wissenschaften unterscheidet und ihr objektiv – da, wo sie korrekt angewendet wird – ein materialistischer Charakter eignet. Gerade diese Seite der Frage interessiert uns daher mehr als alles andere. Zum Schluss ist es bloß notwendig hervorzuheben, dass dieser Weise der Begriffsbildung, wie jeder konsequent materialistischen Methode, ein scharf ausgeprägter *dialektischer* Charakter eignet.

Um sich davon zu überzeugen, reicht es aus, in aller Kürze auf ihre wesentlichen Besonderheiten einzugehen.

1. Es ist wesentlich, dass das für die „Abstraktionsdefinition“ Charakteristische darin besteht, dass irgendetwas *Einzelnes* zum Charakteristikum des *Allgemeinen* wird. Das Gewicht eines *gegebenen* Stückes Eisen wird zum Charakteristikum der Eigenschaft des Gewichtes für alle ihm im Gewicht gleichen Körper. Die *fünf Finger der Hand* werden zum Ausdruck der Eigenschaft „5-zählig zu sein“ aller Mengen von Dingen, die der Menge von Fingern der menschlichen Hand gleichmächtig sind. Ein *gegebenes* Dreieck drückt die Figur aller ihm ähnlichen Dreiecke aus, eine *gegebene* Ware wird

[59] Anm. d. Ü.: Vgl.: Hermann Minkowski, Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie, Leipzig 1907, S. 1: „Wenn n + 1 Dinge auf n Fächer irgendwie verteilt werden, so muß es darunter mindestens ein Fach geben, welches mehr als ein Ding aufnimmt.“ Ders., Geometrie der Zahlen, Leipzig 1910, S. 137: „dass, wenn eine Anzahl von Werthsystemen in eine kleinere Anzahl von Bereichen fallen, mindestens zwei Systeme darunter in denselben Bereich zu liegen kommen müssen“ Vgl. auch Otto Hölder: Die mathematische Methode, Berlin 1924, § 67, S. 169.

zum Vertreter des Werts aller ihr äquivalenten Waren. Indem er die Methode der Darstellung des „Kapitals“ als speziellen Fall der Dialektik überhaupt charakterisiert, zeichnet Lenin in erster Linie gerade diese Besonderheit aus: *Einzelnes ist Allgemeines*. „Somit – schreibt Lenin – sind die Gegensätze (das Einzelne ist dem Allgemeinen entgegengesetzt) identisch: das Einzelne existiert nicht anders als in dem Zusammenhang, der zum Allgemeinen führt. Das Allgemeine existiert nur im Einzelnen, durch das Einzelne. Jedes Einzelne ist (auf die eine oder andere Art) Allgemeines. Jedes Allgemeine ist (ein Teilchen oder eine Seite oder das Wesen) des Einzelnen. Jedes Allgemeine umfaßt nur annähernd alle einzelnen Gegenstände. Jedes Einzelne geht unvollständig in das Allgemeine ein u. s. w. u. s. w. Jedes Einzelne hängt durch Tausende von Übergängen mit einer anderen *Art* Einzelner (Dinge, Erscheinungen, Prozesse) zusammen usw.“[60]

B. Russell – ein Philosoph, der sich viel mit den Grundlagen der Mathematik beschäftigt – machte die Dialektik lächerlich, indem er gerade über die Behauptung Hegels spottete, dass das Einzelne das Allgemeine ist.[61] Das ganze – sagt Russell – ist eine Folge einer Sprachungenauigkeit. Wir verwenden ein und dasselbe Wort „ist“ im doppelten Sinne: erstens im Sinne der Identität – „A ist identisch mit B“, zweitens im Sinne des Einschlusses eines Elementes a in die Klasse B – „Die Birne ist eine Frucht“, „Die Birke ist ein Baum“ etc. Man müsse, so Russell, diese Zweideutigkeit mittels der Einführung geeigneter Symbole abschaffen und es bleibe keinerlei Dialektik übrig.

In Wirklichkeit muss man diese Behauptung Russells mit der von uns angeführten Stelle Lenins vergleichen, um sich zu vergewissern, dass Lenin die beiden Bedeutungen des Wortes „ist“ ganz und gar nicht vermengt, sondern den dialektischen Charakter des Zusammenhangs zwischen ihnen, der für die Metaphysik Russells vollkommen verschwindet, unterstreicht. Jener Umstand, dass Lenin davon im Zusammenhang mit dem „Kapital“ spricht, ist dabei an sich schon bezeichnend. Denn Marx malt im „Kapital“ ein grelles Bild dessen, wie die *einzelne* Ware zum Vertreter des *gemeinsamen* Werts der ihr äquivalenten Waren wird. Und eben dies geschieht, wie wir gesehen haben, bei jeder Definition „durch Abstraktion“. „Einzelnes ist Allgemeines“ bedeutet dabei nicht nur, dass ein gewisses Einzelnes als Element in einer allgemeineren Klasse enthalten ist, sondern auch, dass gerade das Einzelne sich als Ausdruck (und Vertreter) des Allgemeinen darstellt. Die Aufhebung dieser

[60] Anm. d. Ü.: Lenin: Zur Frage der Dialektik. In: Werke, Bd. 38, S. 340, vgl. auch ders., Konspekt zu Hegels „Wissenschaft der Logik“, ebenda, S. 189f.

[61] Anm. d. Ü.: Vgl. etwa B. Russell: Our knowledge of the external world, 2. Aufl., London 1926, S. 48 ff.

„Doppeldeutigkeit“ bedeutet nicht nur die Abschaffung der Dialektik, die Russell so wünschenswert erscheint, sondern mit ihr auch jeglicher Wissenschaft, in erster Linie der Mathematik.

2. Als zweite Besonderheit der „Abstraktionsdefinition“ muss man jenen Umstand anerkennen, dass bei ihr das *Konkrete* als Erscheinungsform seines Gegenteils – des *Abstrakten* – auftritt: Die konkrete Menge von Dingen wird zur Erscheinungsform der abstrakten Eigenschaft, „5-zählig zu sein“, das konkrete Dreieck, das in einen Riss gezeichnet wird, wird als Erscheinungsform der abstrakten Eigenschaft betrachtet, „ein Dreieck überhaupt zu sein, das (in einer gewissen Beziehung) dem gegebenen ähnlich ist“, „konkrete Arbeit [wird] zur Erscheinungsform ihres Gegentheils, abstrakt menschlicher Arbeit“ (Marx).[62]

3. Es ist leicht zu erkennen, dass die „Abstraktionsdefinition“ sich auf die Einheit von *Identität und Unterschied* stützt. Im Grunde war davon schon die Rede, als wir die Notwendigkeit eines *Unterschiedes* für die Absonderung des Gemeinsamen klärten. Das Gemeinsame bleibt ja auch im Unterschiedlichen erhalten, ist das im Unterschiedlichen *Identische*.

4. Und schließlich besteht die vierte Besonderheit dieser „Definition“ darin, dass bei ihr ein *Ding* als Vertreter einer *Eigenschaft*, im allgemeineren Fall eines *Verhältnisses*, auftritt.

So erweisen sich, wie wir gesehen haben, die Zahlen als Eigenschaften der Mengen (Aggregaten, Gesamtheiten) von Dingen, aber als Erscheinungsformen dieser Eigenschaften dienen die sie innehabenden Mengen selbst. Mir scheint vollkommen wahrscheinlich, dass gerade kraft dieser Erscheinung der *abstrakten Eigenschaft in der vergegenständlichten* konkreten Form sich die Zahl auch für die alten Pythagoreer als „etwas zwischen dem Sinnlichen und der Idee“ darstellte.[63] Und man kann sagen, dass der Begriff der Zahl nicht nur für die alten Pythagoreer, sondern auch für die bedeutendsten Mathematiker und Philosophen der Gegenwart nicht eines metaphysischen Anflugs entbehrt.

Über die moderne Wissenschaft schreibt Lenin in bezug auf die Pythagoreer: „Und Jetzt! Das gleiche, die gleiche Verknüpfung (des wissenschaftli-

[62] Anm. d. Übers.: Marx: Das Kapital. Erster Band, a.a.O., S. 88 f.

[63] „Die Zahlen, wo sind sie? Geschieden durch den Raum, im Himmel der Ideen für sich wohnend? Sie sind nicht unmittelbar die Dinge selbst; denn ein Ding, eine Substanz ist doch etwas anderes als eine Zahl, – ein Körper hat gar keine Ähnlichkeit damit.“ (Hegel: Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie, Theorie-Werkausgabe, Bd. 18, S. 250f. Anm. d. Ü.: Auch von Lenin zitiert. Siehe ders., Konspekt zu Hegels „Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie“. In: Werke, Bd. 38, S. 238.

chen Denkens und der Mythologie), nur die Proportion zwischen Wissenschaft und Mythologie ist eine andere."[64] Wahrlich, über die Zahl sagt heute niemand mehr, dass sie „etwas zwischen dem Sinnlichen und der Idee" sei. Am weitesten verbreitet jedoch ist die Vorstellung von ihr als einem „gedachten Ding", das uns unmittelbar in der *Anschauung* gegeben ist – Anschauung im Sinne der kantischen anschaulichen Betrachtung a priori, d. h. einer besonderen Fähigkeit unseres Geistes, die eine gewisse mittlere Stellung zwischen dem Sinnlichen und der Idee einnimmt ... Es ist dieselbe Suppe, nur dünner serviert ...

Wir haben somit ein drastisches Beispiel dessen vor uns, wie das Unverständnis der dialektischen Züge des Prozesses der Abstraktionsbildung und die metaphysische Trennung *des Besonderen vom Allgemeinen, des Konkreten vom Abstrakten, des Dinges vom Verhältnis* zur Mystik führen und vom Idealismus benutzt werden, der aus jenem Umstand, dass das konkrete Ding als Vertreter (und Ausdruck) einer abstrakten Eigenschaft auftritt, den Schluss zieht, dass diese Eigenschaft selbst ein „Gedankending", „eine reine Schöpfung der Einbildungskraft und des Verstandes" ist.

Um Bilanz zu ziehen, muss man lediglich hervorheben, dass auch hier der Kampf an zwei Fronten zu führen ist, denn die einen halten es mit Leibniz für möglich, bei der Feststellung eines *Gleichheitsverhältnisses* zwischen den Dingen stehenzubleiben, nicht die Zahl zu definieren, sondern nur die Gleichzahligkeit, nicht das Verhältnis, sondern nur die Proportion (die Verhältnisgleichheit); die anderen aber wollen, dass das *Ding* unbedingt das Allgemeine ist. Das dialektische Wechselverhältnis von Ding und Verhältnis zerreißt somit: die einen vernichten das Ding, die anderen das Verhältnis. Es ist klar, dass es die Idealisten sind, die die Dinge nicht lieben; umgekehrt kann der Mechanizismus nicht mit dem Verhältnis fertig werden. Daher betrachten die einen die „Abstraktionsdefinition" als einen schöpferischen Akt der Schaffung „idealer Objekte", die anderen aber wollen „den Raum" betasten „und sich von den Früchten als solchen nähren".

Übersetzung: Oliver Schlaudt

[64] Anm. d. Ü.: Ebenda, S. 237.